РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

NEW ECONOMIC SCHOOL

**Сотсков А.И., Колесник Г.В.**

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

## в примерах и задачах

Москва, 2002

Сотсков А.И., Колесник Г.В. Оптимальное управление в примерах и задачах. – М.: Российская экономическая школа, 2002 – 58 с.

Настоящее пособие знакомит с основными условиями оптимальности и методами решения задач вариационного исчисления и оптимального управления. Будет полезно для подготовки и проведения практических занятий по разделу "Оптимальное управление", а также при выполнении домашних заданий по этой теме студентами.

Sotskov A.I., Kolesnik G.V. Optimal Control: Problems and Solutions. – Moscow, New Economic School, 2002 – 58 p.

This book gives basic information on optimality conditions and solution techniques of variational and optimal control problems. It will be useful for teachers in preparing and conducting of sections on optimal control theory and for students in their self-study.

## Предисловие

Теория оптимального управления является одним из разделов курса "Математика для экономистов", читаемого в Российской экономической школе.

Опыт преподавания показывает, что данный раздел – один из наиболее сложных для освоения. Это прежде всего связано с концептуальными отличиями изучаемых в нем задач оптимального управления от задач конечномерной оптимизации, и, как следствие, с существенным усложнением используемых в них условий оптимальности.

В связи с этим представляется полезным дать наглядную иллюстрацию применения данных условий оптимальности к решению задач различных типов. Настоящее пособие и является попыткой дать такую иллюстрацию. В нем содержатся примеры и задачи по четырем темам:

- вариационному исчислению;
- принципу максимума в задачах без ограничений;
- принципу максимума при наличии фазовых ограничений;
- динамическому программированию.

Каждый раздел состоит из теоретической части, описывающей базовые понятия и результаты, используемые при решении соответствующих задач, примеров с решениями, а также задач для самостоятельной работы студентов.

Следует подчеркнуть, что данное пособие ни в коем случае *не является теоретическим курсом*, а ориентировано прежде всего на практическое применение методов оптимального управления. В качестве теоретического пособия по данному разделу можно порекомендовать, например, книгу [3].

По мнению авторов, данное пособие будет полезным преподавателям при подготовке и проведении практических занятий по разделу "Оптимальное управление", а также студентам при выполнении домашних заданий по этой теме.

## Содержание

## 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Определение. Пусть **M** – некоторое пространство функций. Отображение $J$: $\mathbf{M} \to \mathrm{R}^1$, называется *функционалом*.

Ниже будем рассматривать следующие пространства функций:

$\mathrm{C}[t_1, t_2]$ – непрерывные на отрезке $[t_1, t_2]$ функции, с нормой, определенной следующим образом: $\|x(\cdot)\|_0 = \max\{\, |x(t)|,\ t \in [t_1, t_2]\}$;

$\mathrm{C}^1[t_1, t_2]$ – непрерывно-дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$ функции, с нормой $\|x(\cdot)\|_1 = \max\{\, \|x(\cdot)\|_0, \|x'(\cdot)\|_0\}$;

*Простейшая задача вариационного исчисления* формулируется следующим образом: найти экстремум функционала вида:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, x')dt \tag{1.1}$$

на кусочно-гладких функций $x(\cdot)$, соединяющих точки $(t_1, x_1)$ и $(t_2, x_2)$ (т.е. удовлетворяющих краевым условиям $x(t_1) = x_1$; $x(t_2) = x_2$). Функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие ограничениям задачи (в данном случае граничным условиям), называются *допустимыми*.

**Определение.** Говорят, что $x^*(\cdot)$ доставляет *слабый локальный максимум* функционалу $J$, если $\exists \varepsilon > 0$: для любой допустимой кривой $x(\cdot)$, такой, что $\| x^*(\cdot) - x(\cdot)\|_1 < \varepsilon$, выполнено: $J(x(\cdot)) \le J(x^*(\cdot))$.

Говорят, что $x^*(\cdot)$ доставляет *сильный локальный максимум* функционалу $J$, если $\exists \varepsilon > 0$: для любой допустимой кривой $x(\cdot)$, такой, что $\| x^*(\cdot) - x(\cdot)\|_0 < \varepsilon$, выполнено: $J(x(\cdot)) \le J(x^*(\cdot))$.

Необходимое условие слабого экстремума функционала (1.1) дается *уравнением Эйлера*:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0 \tag{1.2}$$

Гладкое решение уравнения Эйлера называется *экстремалью* функционала $J$.

### Примеры

**1.** Найти экстремаль в задаче: $J = \int_1^2 (t^2 x' + t x'^2)dt$; $x(1) = a$; $x(2) = b$.

Р е ш е н и е . $F(\mathrm{t}, x, x') = t^2x' + tx'^2$ , $F_x = 0$, $F_{x'} = t^2 + 2tx'$. Составим уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 2t + 2x' + 2\,tx'' = 0$$

Видно, что в это уравнение не входит $x$. Обозначим $y = x'$, тогда $y' = x''$ и уравнение примет вид:

$$t + y + ty' = 0$$

Решением данного уравнения является $y(t) = c/t - t/2$. Тогда

$$x(t) = \int y(t)dt + d = c \ln t - t^2/4 + d. \qquad (1.3)$$

Находя постоянные $c$ и $d$ из краевых условий, окончательно получаем:

$$x^*(t) = \frac{b - a + 3/4}{\ln 2} \ln t - t^2/4 + a + 1/4.$$

Функция $x^*(t)$ – гладкая на [1, 2], следовательно, она является экстремалью.

З а м е ч а н и е . В задаче с функционалом $J = \int_0^1 (t^2x' + tx'^2)dt$ экстремали отсутствуют, так как решения уравнения Эйлера (1.3) теряют гладкость на отрезке [0, 1].

**2.** Найти экстремаль и проверить, доставляет ли она слабый минимум в задаче:

$$J = \int_0^1 (x')^2 dt\,; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1.$$

Р е ш е н и е . $F(t, x, x') = (x')^2$, $F_x = 0$, $F_{x'} = 2x'$ . Составим уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = -\,2\,x'' = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = ct + d$. Из краевых условий окончательно получаем экстремаль $x^*(t) = t$.

Проверим, что она действительно доставляет экстремум функционалу $J$. Рассмотрим произвольное приращение $h(\cdot) \in \mathrm{C}^1$, такое, что $h(0) = h(1) = 0$, и исследуем, как изменится значение функционала $J$:

$$J(x + h) - J(x) = \int_0^1 (x' + h')^2 dt - \int_0^1 (x')^2 dt = 2\int_0^1 (x'h')dt + \int_0^1 (h')^2 dt \geq 2\int_0^1 (x'h')dt$$

Беря последний интеграл по частям, получим при $x(\cdot) = x^*(\cdot)$:

$$\int_0^1 (x'h')dt = \int_0^1 (x')dh = x'h\,|_0^1 - \int_0^1 (x''h)dt = 0$$

Таким образом, получаем, что $J(x^* + h) \geq J(x^*)$, т.е. $x^*(\cdot)$ доставляет глобальный минимум функционалу $J$.

**3.** Найти экстремаль и проверить, доставляет ли она слабый и сильный минимум в задаче:

$$J = \int_0^{\pi} x^2(1 - x'^2)dt; \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

Р е ш е н и е . $F(\mathrm{t}, x, x') = x^2(1 - x'^2)$, тогда $F_x = 2x(1 - x'^2)$, $F_{x'} = -2\, x'x^2$ и

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 2x(1 - x'^2) + 2\, x''x^2 + 4xx'^2 = 0$$

Проведем замену переменных: $x' = p(x)$, $x'' = p_x\, x' = p_x\, p$. Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$x(1 - p^2) + p_x\, p\, x^2 + 2xp^2 = 0$$

или

$$x + p_x\, p\, x^2 + xp^2 = 0$$

Одним из его корней является $x(t) \equiv 0$. Ненулевые корни определяются из соотношения:

$$1 + p_x\, p\, x + p^2 = 0$$

Проверим, что $x(t) \equiv 0$ доставляет слабый минимум функционалу $J$. Действительно, для $\forall z(\cdot)\in \mathrm{C}^1[0, \pi]$: $\|z(\cdot)\|_1 < \varepsilon$ имеем, что $\forall t\in[0, \pi]$ $|z'(t)| < \varepsilon$. Тогда для $\varepsilon < 1$ $J(z(\cdot)) > 0$, в то время как $J(x(\cdot)) = 0$.

Сильный минимум не достигается, так как положив, например, $z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nt$, получим $J(z_n(\cdot)) = \pi/(2n) - \pi/8 < 0$ при $n > 4$. В то же время, для достаточно больших $n$ функции $z_n(t)$ лежат в сколь угодно малой сильной окрестности функции $x(t) \equiv 0$.

## Упражнения

1. В задаче

$$J = \int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2 dt \to \min; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1,$$

показать, что решение уравнения Эйлера существует, единственно, доставляет абсолютный минимум, но не является функцией класса $C^1$.

2. Показать, что в задаче

$$J = \int_0^1 t^2 \dot{x}^2 dt \to \min; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1,$$

не существует ни одного решения уравнения Эйлера. Найти минимизирующую последовательность (если она имеется).

3. Определить экстремаль, удовлетворяющую краевым условиям и проверить, доставляет ли она слабый минимум:

а). $J = \int_{-1}^{1} t^2 x'^2 dt$; $x(-1) = -1$; $x(1) = 1$;

б). $J = \int_0^1 x x'^2 dt$; $x(0) = 0$; $x(1) = 1$;

в). $J = \int_0^1 (1+t) x'^2 dt$; $x(0) = 0$; $x(1) = 1$;

г). $J = \int_0^1 x^2 x'^2 dt$; $x(0) = 0$; $x(1) = 1$;

д). $J = \int_0^{3\pi/2} (x'^2 - x^2) dt$; $x(0) = x(3\pi/2) = 0$.

е). $J = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2}\, dt$; $x(a) = 0$; $x(b) = 1$.

## 2. Задача оптимального управления. Принцип максимума.

Пусть имеется некоторая динамическая система, *состояние* которой в каждый момент времени $t$ описывается вектор-функцией $x(t) \in \mathrm{R}^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $u(t) \in \mathbf{U}_t \subseteq \mathrm{R}^r$. Будем рассматривать класс куусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном *управлении* $u(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{2.1}$$

Рассмотрим *задачу оптимального управления* данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум *критерию качества* вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to \max. \tag{2.2}$$

При этом первое слагаемое (*интегральная часть* критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, тогда как второе слагаемое (*терминальный член*) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления $t_0$ и $t_1$. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\Phi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1..m. \tag{2.3}$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (2.3) являются условия вида:

$$x(t_0) - x_0 = 0; \quad x(t_1) - x_1 = 0, \tag{2.4}$$

соответствующие *закрепленному* левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, $t_0$ и $t_1$, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с *фиксированным* временем управления, или неизвестными (задача с *нефиксированным* моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина.

**Теорема.** Пусть $(x^*(t), u^*(t), t_0^*, t_1^*)$ – оптимальный процесс в задаче (2.1) – (2.3). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители $\lambda$ и $\psi$ : $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathrm{R}^{m+1}$, $\lambda_0 \geq 0$ и $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in \mathrm{R}^n$, такие, что выполнены следующие условия:

а). *Функция Понтрягина* задачи

$$H(t, x, u, \psi, \lambda_0) = \lambda_0 F(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)) \tag{2.5}$$

при каждом $t \in [t_0, t_1]$ достигает максимума по $u$ в т. $u^*(t)$, когда $x = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$.

б). Вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет *сопряженной системе* дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)}{\partial x_i}; \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

с краевыми условиями (*условия трансверсальности*)

$$\psi_i(t_0^*) = -\left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_0)}\right);$$

$$\psi_i(t_1^*) = \left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)}\right). \tag{2.7}$$

в). Выполнены условия на подвижные концы:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,\big|_{t = t_0} = \left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_0}\right); \tag{2.8}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,\big|_{t = t_1} = -\left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_1}\right). \tag{2.9}$$

Замечания.

1. Множитель Лагранжа $\lambda_0$ определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В *вырожденном случае* совокупность ограничений задачи такова, что оптимальное управление $u^*(t)$ не зависит от вида интегранта $F(t, x(t), u(t))$. При этом из условий принципа максимума следует, что $\lambda_0 = 0$. В *невырожденном случае* $\lambda_0 > 0$, поэтому ее можно положить равной 1 (разделив функцию H на $\lambda_0$). При этом условия принципа максимума не изменятся.

Как правило, из физического смысла задачи понятно, допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители $\lambda$ и $\psi(t)$ не могут одновременно быть равными 0.

2. Для задачи с закрепленными концами (2.4) сопряженная функция $\psi(t)$ имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

   Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений (2.3), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial\Phi_0(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))}{\partial x_i(t_0)}; \quad \psi_i(t_1) = \frac{\partial\Phi_0(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))}{\partial x_i(t_1)}. \qquad (2.7')$$

## Примеры

**1.** Найти оптимальное управление в задаче:

$$J(u, x) = \int_0^4 (u^2 + x)dt \to \min; \quad \dot{x} = u; \; x(0) = 0; \; |u| \le 1$$

Р е ш е н и е . Перепишем данную ее в виде задачи на максимум

$$-\int_0^4 (u^2 + x)dt \to \max$$

и воспользуемся теоремой о необходимых условиях.

Функция Понтрягина (рис. 2.1):

$$H = -\lambda_0(u^2 + x) + \psi u;$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0;$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(4) = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x(1)} = 0$$

(т.к. правый конец фазовой траектории свободен).

Исследуем вырожденный случай: положим $\lambda_0 = 0$.

Тогда $\dot{\psi} \equiv 0$, откуда следует, что $\psi = \text{const}$. Но из условия трансвер-

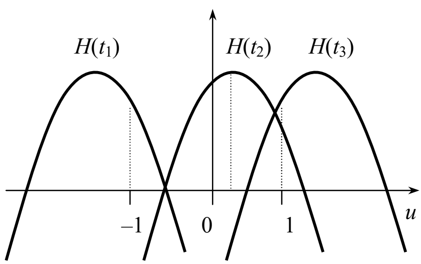


*Рис. 2.1*

сальности следует, что $\psi \equiv 0$. Таким образом получили, что множители $\lambda_0$ и $\psi$ одновременно равны 0, что противоречит условию теоремы. Следовательно, вырожденных решений задача не имеет.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$H = \psi u - u^2 - x \to \max_u ;$$

$$\dot{\psi} = 1; \quad \psi(4) = 0.$$

$H$ является квадратичной отрицательно определенной функцией $u$. Вершина параболы отыскивается из условия экстремума I порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0$$

Если она лежит внутри отрезка изменения управления [–1, 1], то она и является точкой максимума. В противном случае максимум $H$ достигается на правой либо левой границе отрезка (см. рис. 2.1).

Таким образом, получаем:

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi(t), & |\psi(t)| > 2 \\ \dfrac{\psi(t)}{2} & |\psi(t)| \le 2 \end{cases}$$

Оптимальное управление зависит от величины $\psi(t)$. Решая сопряженную систему, получаем $\psi(t) = t - 4$. Видно, что $-4 \le \psi(t) \le -2$ при $0 \le t \le 2$ и $-2 \le \psi(t) \le 0$ при $2 \le t \le 4$. Тогда

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Определим теперь фазовую траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальному управлению:

$$\dot{x} = u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = \begin{cases} -t + c_1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + c_2, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Для участка траектории при $t \in [0, 2]$, постоянная интегрирования $c_1$ находится из начального условия $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Для участка при $t \in [2, 4]$ воспользуемся условием непрерывности фазовой траектории $x(t)$ в точке $t = 2$:

$$\lim_{t \to 2-} x(t) = \lim_{t \to 2+} x(t).$$

Из этого условия получаем $c_2 = 1$. Итак, окончательно:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}, \qquad x^*(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

**2.** Найти траекторию $x(t)$, доставляющую минимум функционалу:

$$J(u, x) = \int_0^2 |\,\ddot{x}\,|\,dt\,,$$

при ограничениях:

$$\ddot{x} \le 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad \dot{x}\,(2) = 2.$$

Р е ш е н и е . Введем обозначения $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}\,(t) = x_2(t)$, $\ddot{x}\,(t) = u(t)$. Тогда исходная задача запишется в следующем виде:

$$J(u, x) = \int_0^2 |\,u\,|\,dt \to \min, \quad u(t) \le 2,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(2) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(2) = 2,$$

Выпишем необходимые условия оптимальности для этой задачи:

$$H = -\,\lambda_0|\,u\,| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max; \tag{2.10}$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \psi_2(0) = 0.$$

Рассмотрим вырожденный случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ и максимум достигается, когда:

$$u(t) = \begin{cases} -\infty, & \psi_2(t) < 0 \\ (-\infty, 2], & \psi_2(t) = 0\,. \\ 2, & \psi_2(t) > 0 \end{cases}$$

Управление $u(t) = -\,\infty$ при $\psi_2(t) < 0$ нереализуемо. При $\psi_2(t) = 0$ получаем $\psi_1(t) = 0$, что противоречит условиям принципа максимума. При $u(t) = 2$ траектория движения имеет следующий вид:

$$\dot{x}_2 = 2 \;\Rightarrow\; x_2(t) = 2t + a, \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \;\Rightarrow\; x_1(t) = t^2 + at + b.$$

Тогда из краевых условий получаем: $a = -2$, $a = -3/2$, $b = 0$. Таким образом, для $u(t) = 2$ при $\psi_2(t) > 0$ допустимых экстремалей нет.

Рассмотрим теперь невырожденный случай $\lambda_0 = 1$. Условие оптимальности по $u(t)$ принимает вид

$$H = -|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max, \quad u \le 2.$$

Решением этой задачи максимизации (2.10) в этом случае является управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi_2(t) < 1 \\ 2, & \psi_2(t) \ge 1 \end{cases}.$$

Из сопряженной системы получаем

$$\psi_1(t) = c_1; \quad \psi_2(t) = -c_1 t + c_2.$$

Учитывая условие трансверсальности $\psi_2(0) = 0$, находим $c_2 = 0$, откуда $\psi_2(t) = -c_1 t$. Для такой функции $\psi_2(t)$ величина $(\psi_2(t) - 1)$ может менять знак не более одного раза, поэтому оптимальное управление будет иметь вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau \\ 2, & \tau \le t \le 2 \end{cases}.$$

Определим момент переключения управления $\tau$. На отрезке $[0, \tau]$ траектория подчиняется системе уравнений:

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = a,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = at + b.$$

Из начального условия $x_1(0) = 0$ находим $b = 0$, т.е. $x_1(t) = at$.

На отрезке $[\tau, 2]$ основная система уравнений имеет вид (2.11), при это из краевых условий получаем $a = -2$, $b = 1$.

Из условия непрерывности фазовой траектории в точке $\tau$ получаем систему уравнений для определения параметров $\tau$ и $a$:

$$x_1(\tau^-) = at = \tau^2 - 2\tau + 1 = x_1(\tau^+); \quad x_2(\tau^-) = a = 2\tau - 2 = x_2(\tau^+).$$

Отсюда $\tau = 1$, $a = 0$.

Итак, оптимальный процесс в данной задаче имеет вид:

$$x^*(t) = x_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 2t + 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}.$$

**3.** Простейшая задача оптимального управления для потребителя.

Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t} dt$$

$$\dot{W} = rW - c, \; t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид: $W(0) = W_0$, $W(T) = W_T$ и ограничение на объем мгновенного потребления $c$: $0 \le c \le 1$. Здесь $W$ - реальное богатство потребителя, которое прирастает с темпом $r$, это фазовая координата. Часть его потребитель тратит на потребление $c$ - это управление, а другая часть идет на приращение богатства. Для определенности будем считать, что $\beta < r$, а также, что $W_0\, e^{rt} > W_T$.

Функция Понтрягина $H$ и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0\, c e^{-\beta t} + \psi_1 (rW - c),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\, r\psi_1 ,$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно $\psi_0$ и $\psi_1$ не обращаются тождественно в ноль. Уравнение можно сразу проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\; e^{-rt}$ . Условие максимума $H$ по $c$ дает соотношение:

$$(\psi_0\, e^{-\beta t} - \psi_1(0)\, e^{-rt})\, c \to \max \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда заключаем, что если $\psi_1(0) \le 0$, то получаем режим $c \equiv 1$, который будет оптимальным при некотором достаточно высоком $W(0)_{\max}$. Если наше $W_0$ меньше, то отрицательное $\psi_1(0)$ не годится, значит $\psi_1(0) > 0$. В этом случае, если $\psi_0 = 0$, то реализуется режим $c \equiv 0$, который также будет оптимальным при некотором достаточно низком $W(0)_{\min}$. Если наше $W_0$ выше, то нулевое $\psi_0$ не годится, значит $\psi_0 > 0$. В таком случае его можно считать равным 1, воспользовавшись тем, что сопряженный вектор $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ определен с точностью до положительного множителя. Условие максимума $H$ по $c$ запишем в более удобном виде:

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)\, t})\, c \to \max \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда видно, что режимы, для которых $W(0)_{\min} < W(0) < W(0)_{\max}$ проходят с переключением: $\psi_1(0) > 1$, $c(t) = 0$ на начальном отрезке, затем в некоторый момент $t$ наступает равенство: $\psi_1(0)e^{-(r-\beta)\, t} = 1$ и затем $c(t) =1$ до конца интервала управления.

То, что описанные режимы действительно доставляют максимум функционалу, следует из вогнутости функции Понтрягина по совокупности фазовой координаты и управления, $W$ и $c$, такая теорема будет доказана впереди. Картина фазовых траекторий представлена на рисунке.

Аналогичный анализ можно провести для случая, когда $\beta > r$. Тогда переключения будут с $c = 1$ на $c = 0$. Результаты приведены на рисунке 2.2.

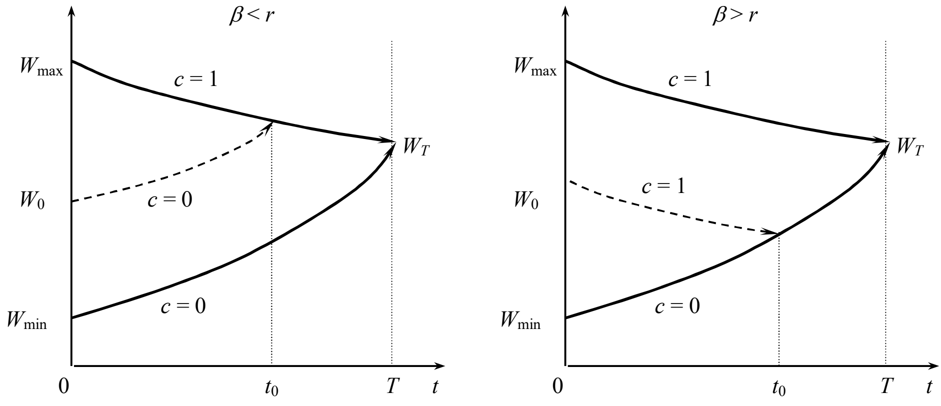


*Рис. 2.2.*

**4.** Задача оптимального управления со свободным правым концом. Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t} dt + \Phi(W_T)$$

$$\dot{W} = rW - c, \; t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид: $W(0) = W_0$, $W_T$ – свободно, ограничение на объем мгновенного потребления $c$: $0 \le c \le 1$. Функция $\Phi$ – определена и дифференцируема на $\mathsf{R}_+$, $\Phi' > 0$, $\Phi'' < 0$. Для определенности будем считать, что $\beta < r$.

Функция Понтрягина $H$ и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0 \, ce^{-\beta t} + \psi_1 (rW - c),$$

$$\dot{\psi}_1 = -r\psi_1,$$

с граничным условием (условием трансверсальности)

$$\psi_1(T) = \psi_0 \Phi'(W_T),$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно $\psi_0$ и $\psi_1$ не обращаются тождественно в ноль. Отсюда следует, что $\psi_0 > 0$, $\psi_1 > 0$. Положим $\psi_0 = 1$. Сопряженное уравнение можно проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$ .Тогда условие трансверсальности принимает вид:

Условие максимума $H$ по $c$ дает соотношение:

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t})\, c \to \max \text{ по } c: 0 \le c \le 1.$$

Возможны следующие режимы:

$$\psi_1(0)\, e^{-(r - -\beta)t} > 1 \Rightarrow c = 0,$$
$$\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} < 1 \Rightarrow c = 1.$$

При этом возможно не более одного переключения с режима $c = 0$ на режим $c = 1$. В частности, при $t = T$ , учитывая условие трансверсальности, можно разбить терминальное множество $\{(t, W)\colon t = T,\ W \geq 0\}$ на плоскости $(t, W)$ на две части:

$$\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1, \text{ где } c = 0 \text{ и}$$
$$\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} < 1, \text{ где } c = 1.$$

Точка $W_T^* : \Phi'(W_T^*)\, e^{\beta T} = 1$ разграничивает эти области. Из условия максимума $H$ по $c$ видно, что если $W(T) = W_T^*$, то при всех $t < T$ $c(t) = 0$. Этому режиму соответствует траектория $W(t) = W_0^* e^{rt}$. В силу вогнутости $\Phi$ неравенство $\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1$ сохранится для всех начальных условий $W_0 < W_0^*$. Таким образом для всех $W_0 < W_0^*$ получаем экстремали $W(t) = W_0 e^{rt}$ с управлением $c \equiv 0$.

При $W_0 > W_0^*$ возможно переключение. Построим кривую переключения в координатах $(t, W)$. На оси $t = T$ кривая начинается в т. $W_T^*$. Чтобы определить ее при $t < T$ заметим, что момент переключения $t$ находится из условия:

$$\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} = 1.$$

Выразим $\psi_1(0)$ из условия трансверсальности и подставим в последнее уравнение. Получим:

$$\Phi'(W_T)\, e^{rT} e^{-(r-\beta)t} = 1 \text{ или}$$
$$\ln \Phi'(W_T) + r(T - t) + \beta t = 0. \tag{2.12}$$

Зная, что при $W_T > W_T^*$ на последнем участке траектории $c = 1$ проинтегрируем уравнение $\dot{W} = rW - 1$ в пределах от $t$ до $T$, считая, что $W(T) = W_T$, а в момент $t$ имеем $X$ :

$$W(T)\, e^{-rT} - X e^{-rt} = (e^{-rT} - e^{-rt})/r, \text{ или}$$
$$W(T) = e^{rT}(X e^{-rt} + (e^{-rT} - e^{-rt})/r).$$

Подставим это выражение для $W(T)$ в уравнение (2.12):

$$\ln \Phi'(r^{-1} - (r^{-1} - X)\, e^{r(T-t)}) + rT - (r - \beta)\, t = 0. \tag{2.13}$$

Неявная функция $X(t)$ из соотношения (2.13) описывает кривую переключения. Легко проверить, что кривая $X(t)$ убывает ( с темпом, большим, чем $r$) с ростом $t$ от $t = 0$ до $t = T$. Любая траектория, начинающаяся

$\beta < r$

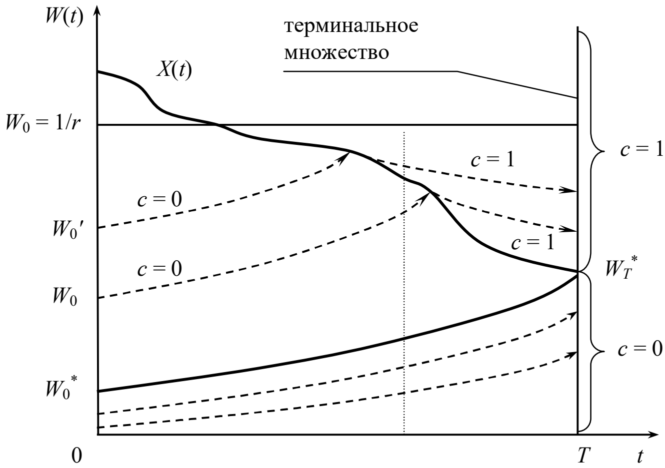


*Рис. 2.3.*

с $W_0 < X(0)$ переключается с $c = 0$ на $c = 1$ на кривой $X(\cdot)$. На этом задача синтеза оптимального управления завершена.

Полученные результаты проиллюстрированы на рисунке 2.3.

**5.** З а д а ч а  н а  б ы с т р о д е й с т в и е. Имеется динамическая система, характеризуемая координатой $x$ и скоростью $v$. Параметром управления является ускорение системы, выбираемое из отрезка [–1, 1]. Требуется за минимальное время $T$ перевести систему из начального состояния $(x_0, v_0)$ в состояние (0, 0). Фиксируем время начала процесса. Время окончания, очевидно, свободное.

Р е ш е н и е . Запишем условие задачи в формальном виде:

$$T \to \min;$$
$$\dot{x} = v; \quad x(0) = x_0; \quad x(T) = 0;$$
$$\dot{v} = u; \quad v(0) = v_0; \quad v(T) = 0;$$
$$|u| \le 1.$$

Функционал задачи может быть преобразован к интегральному виду:

$$-\int_0^T 1dt \to \max.$$

**I.** Выпишем условия принципа максимума:

$$H = -\lambda_0 + \psi_1 v + \psi_2 u \to \max_u ;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\psi_1; \; H(t_1) = 0.$$

Так как и правый и левый конец фазовой траектории – закрепленные, то условия трансверсальности на сопряженные функции отсутствуют.

Так как функция Понтрягина линейна по $u$, то максимум $H$ может достигаться только на концах отрезка изменения управления (за исключением случая, когда $\psi_2 = 0$). Таким образом оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-1, 1], & \psi_2(t) = 0 \end{cases}$$

где запись $[-1, 1]$ означает, что $u(t)$ в этом случае не определяется из условий принципа максимума.

Из сопряженной системы могут быть найдены $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\psi_1(t) = c; \quad \psi_2(t) = ct + d.$$

Кроме того, $\lambda_0 = \psi_2 u \;|_{t=T}$ . Видно, что в зависимости от значений постоянных интегрирования $c$ и $d$ может иметь место несколько различных типов поведения $\psi_2(t)$:

а). $c \equiv 0$. В этом случае $\psi_2(t) = d$. Тогда $u^*(t) = \operatorname{sgn} d$ – постоянна на $[0, T]$.

б). $c < 0$. Тогда $\psi_2(t)$ – убывающая линейная функция. При этом знак $\psi_2(t)$ может изменяться не более одного раза, причем только с '+' на '–'. Таким образом:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau) \\ -1, & t \in (\tau, T\,] \end{cases}, \tag{2.14}$$

где $\tau \in [0, T]$ – момент переключения управления. $u(\tau)$ может быть определено произвольным образом, так как переопределение функции в одной точке не повлияет на значение интегрального функционала.

в). $c > 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что оптимальное управление может иметь вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau) \\ 1, & t \in (\tau, T\,] \end{cases}. \tag{2.15}$$

Вырожденный случай возможен только при $\psi_2(T) = 0$. Это происходит, когда начальные состояния $(x(0), v(0))$ переводятся в точку $(0, 0)$ управлением $u^* \equiv +1$ или $u^* \equiv -1$.

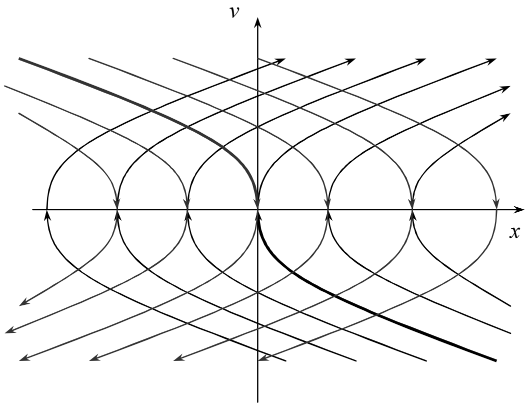


*Рис. 2.4*

Таким образом, выделены все возможные типы управлений при различных значениях сопряженных функций. Рассмотрим теперь поведение системы для этих управлений.

а). $u(t) = 1$. Тогда основная система имеет вид:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = 1,$$

откуда получаем:

$$v(t) = t + c_1; \quad x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Построим фазовую диаграмму поведения системы. Для этого выразим $x(t)$ через $v(t)$:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = (\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_1^2) - c_1^2 + c_2 = \frac{1}{2} v(t)^2 + d_1$$

Таким образом возможные фазовые траектории системы в этом случае представляют собой семейство квадратичных парабол, ориентированных вправо (см. рис. 2.4).

Движение системы вдоль этих траекторий будет происходить снизу вверх (т.к. $v$ – возрастающая функция от $t$).

Видно, что достижение конечной точки (0, 0) при помощи управления $u(t) \equiv 1$ возможно только для некоторых начальных условий, а именно, точек, лежащих на нижней ветви параболы $x_0 = \frac{1}{2} v_0^2$ (выделена жирным на рис. 2.4).

б). $u(t) = -1$. В этом случае:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = -1,$$

$$v(t) = -t + c_3; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

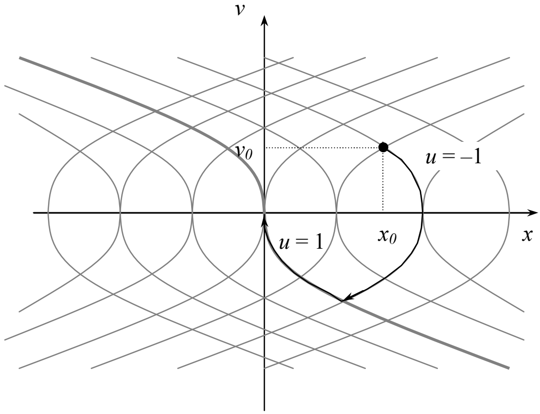


*Рис. 2.5*

Выражая $x(t)$ через $v(t)$ аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 = -\left(\frac{t^2}{2} - c_3 t + c_3^{\,2}\right) + c_3^{\,2} + c_4 = -\frac{1}{2} v(t)^2 + d_2$$

Фазовые траектории системы при $u(t) = -1$ представляют семейство квадратичных парабол, ориентированных влево, движение вдоль траекторий происходит сверху вниз. Достижение конечной точки при $u(t) \equiv -1$ возможно только для точек, лежащих на верхней ветви параболы $x_0 = -\frac{1}{2} v_0^{\,2}$.

Таким образом, для точек, лежащих на *линии переключения*

$$x_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} v_0^2, & v_0 \le 0 \\ -\frac{1}{2} v_0^2, & v_0 > 0 \end{cases}$$

оптимальное управление будет постоянным на всем отрезке $[0, T]$: $u^*(t) \equiv \operatorname{sgn} x_0$. Здесь мы имеем вырожденный случай $\lambda_0 = 0$.

Для точек, лежащих над данной кривой, оптимальное управление будет иметь вид (2.15). Действительно, в противном случае система будет перемещаться под действием управления $u(t) = 1$ вправо вверх, и никогда не достигнет начала координат.

Аналогично, для точек, лежащих ниже линии переключения управление будет иметь вид (2.14).

Определим момент переключения управления $\tau$. Пусть начальное состояние $(x_0, v_0)$ находилось над линией переключения (см. рис. 2.5). Тогда траектория движения системы на отрезке времени $[0, \tau]$ описывается уравнениями:

$$v(t) = v_0 - t; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

С другой стороны, на отрезке $[\tau, T]$ система движется под действием управления $u(t) = 1$ и конечное ее состояние равно (0, 0). Тогда:

$$v(t) = t - T; \quad x(t) = \frac{t^2 + T^2}{2} - Tt.$$

Тогда из условий непрерывности фазовой траектории в момент времени $\tau$

$$v_0 - \tau = \tau - T; \quad -\frac{\tau^2}{2} + v_0\tau + x_0 = \frac{\tau^2 + T^2}{2} - T\tau.$$

Решая эту систему относительно переменных $\tau$ и $T$, получаем:

$$\tau = v_0 + \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}; \quad T = v_0 + 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}.$$

Моменты переключения и окончания управления для начальных условий, лежащих ниже линии переключения, определяются аналогичным образом.

**II.** Приведем также решение, использующее функцию Лагранжа. В рассматриваемой задаче она имеет следующий вид

$$\mathcal{L} = \int_0^T \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})dt - \lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - x_0) + \lambda_2(v(0) - v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T).$$

Необходимые условия оптимальности состоят в том, что $\exists\ \lambda_0, \lambda_0, \ldots, \lambda_4, \psi_1(t), \psi_1(t)$, такие, что выполнено:

a). Уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0; \quad -\frac{d}{dt}L_{\dot{v}} + L_v = 0,$$

что приводит к сопряженной системе:

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 + \psi_1 = 0.$$

Условия трансверсальности по $x$ для терминанта

$$\Phi(x(0), x(T), v(0), v(T), T) = -\lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - x_0) + \lambda_2(v(0) - v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T):$$

$$\psi_1(0) = -\lambda_1 \Phi'_{x(0)} = -\lambda_1; \quad \psi_1(T) = -\lambda_3 \Phi'_{x(T)} = -\lambda_3;$$

$$\psi_2(0) = -\lambda_2 \Phi'_{v(0)} = -\lambda_2; \quad \psi_2(T) = -\lambda_4 \Phi'_{v(T)} = -\lambda_4;$$

b). Оптимальность лагнажиана $L$ по $u$ (выписаны только слагаемые, зависящие от $u$):

$$\max_{u\in[-1,1]}\{\psi_2(t)u\} \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-1,1], & \psi_2(t) = 0 \end{cases}.$$

c). Стационарность функции Лагранжа по $T$:

$$L'_T = 0 \quad \Rightarrow \; -\lambda_0 T + \lambda_3 \dot{x}(T) + \lambda_4 \dot{v}(T) = 0.$$

Видно, что условия (a) и (b) соответствуют условиям принципа максимума и приводят к аналогичным решениям. Условие (c) возникает для задач с нефиксированным временем окончания процесса и представляет собой дополнительное уравнение для определения оптимального $T$.

**6.** Еще одна модель поведения потребителя. Рассматривается динамическая модель потребителя, максимизирующего дисконтированную полезность от потребления $U(c)$ на фиксированном отрезке времени $[0, T]$:

$$\max \int_0^T U(c) e^{-\beta t}\, dt. \tag{2.16}$$

Выбор потребления $c$ подчиняется бюджетному ограничению

$$\dot{k} + \dot{b} + c = f(k) + rb, \quad t \in [0, T], \tag{2.17}$$

при граничных условиях $k_0 + b_0 = W_0$, и условии на правом конце

$$k(T) + b(T) \geq W_T, \tag{2.18}$$

где $T$, $r$ и $\beta$ –фиксированные положительные числа.

Дифференциальное ограничение (2.17), записанное в реальных переменных, означает, что в каждый момент времени потребитель выбирает, куда вкладывать выпуск производства $f(k)$, которым он владеет: инвестировать в капитал $\dot{k}$, инвестировать в актив $\dot{b}$, приносящий поток процентного дохода $rb$, или пустить в потребление $c$. В начале планового периода реальное богатство потребителя ($k_0 + b_0$) составляет $W_0$, а в конце потребитель хочет, чтобы его реальное богатство ($k(T) + b(T)$) было не меньше определенной величины $W_T$. Предполагается, что функции $U$ и $f$ определены на $\mathbb{R}_+$, дифференцируемы, причем $U'(0) = f'(0) = \infty$, вогнуты и монотонно возрастают.

Решение. Проанализируем эту задачу, как задачу оптимального управления, с помощью принципа максимума. Для этого приведем ограничение (2.17) к нормальной форме, введя новую переменную $u = \dot{k}$.

Тогда дифференциальные связи будут иметь вид:

$$\dot{k} = u,$$
$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u.$$

Как фазовые координаты $k$ и $b$ (запас капитала и актива), так и управления $c$ и $u$, являются неизвестными функциями времени.

Рассмотрим случай, когда на изменение $c$ и $u$ не накладывается никаких ограничений. По смыслу задачи $c$ не может быть отрицательным, т.к. в этом случае не определена полезность потребителя $U$. Отрицательное $u$ допустимо, и соответствует проеданию капитала. Предположим, что решение задачи в этом случае существует.

Запишем функцию Понтрягина:

$$H = \psi_0 U(c) e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 \,(f(k) + rb - c - u)\ .$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\ \psi_2 f'(k), \qquad \dot{\psi}_2 = -\ \psi_2\, r.$$

Максимизируя $H$ по $c$ и $u$ получаем уравнения

$$\psi_0 U'(c) e^{-\beta t} = \psi_2, \qquad \psi_1 = \psi_2 \tag{2.19}$$

(здесь мы воспользовались существованием решения).

Отсюда следует, что $\psi_0 \neq 0$ (обратное приводит к обнулению вектора $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$, что противоречит предположению о существовании решения и принципу максимума). Так как вектор $\psi$ определен в условиях оптимальности с точностью до положительного множителя, то можно положить $\psi_0 = 1$. Кроме того, так как $U' > 0$, заключаем, что $\psi_1 = \psi_2 > 0$. Из сопряженной системы получаем, что

$$f'(k(t)) = r \quad \forall\ t \in [0, T], \tag{2.20}$$

откуда находим $k(t) \equiv k^*$.

Сопряженная система сводится к одному уравнению

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 r,$$

которое имеет решение $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_1(0)\ e^{-rt}$ . Тогда

$$U'_c = \psi_1(0)\ e^{(\beta - r)t},$$

откуда можно выразить $c = C(t,\ \psi_1(0))$.

Заметим, что из вогнутости функции $U$ следует, что $c$ убывает, если $\beta > r$, и возрастает, если $\beta < r$.

Ограничения на левом и правом концах дают нам условия трансверсальности:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ и } \psi_1(T) = \psi_2(T),$$

указывающие, что вектор $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ должен быть коллинеарен градиенту ограничения $k(T) + b(T) \geq W_T$. Это равенство уже обеспечено условиями (2.19).

Кроме того, так как $\psi_i > 0$, то из условия дополняющей нежесткости на правом конце следует, что концевое ограничение выполняется со знаком равенства:

$$k(T) + b(T) = k^* + b(T) = W_T .$$

Тогда значения актива $b(t)$ на концах:

$$b(0) = W_0 - k^*, \quad b(T) = W_T - k^* .$$

Полученные значения $b(0)$ и $b(T)$ позволяют найти $\psi_1(0)$. Для этого рассмотрим исходное ограничение задачи

$$\dot{b} = rb + [f(k_0) - C(t, \psi_1(0)], \; b(0) = W_0 - k^* . \qquad (2.21)$$

Проинтегрируем его от 0 до $t$:

$$b(t) = e^{rt} (W_0 - k^* + \int_0^t [f(k_0) - C(\tau, \psi_1(0)] d\tau.$$

При $t = T$ получаем соотношение для нахождения $\psi_1(0)$

$$\int_0^T [f(k_0) - C(t,\psi_1(0)] e^{-rt} d\tau = (W_T - k^*)e^{-rt} - (W_0 - k^*). \qquad (2.22)$$

Затем находим $c(t) = C(t,\psi_1(0))$ и $b(t)$ по формуле (2.21).

Мы установили, что $c(t)$ ведет себя монотонно. Осталось исследовать поведение функции $b(t)$. Обозначим $A(t) = f(k_0) - c(t)$.

Предположим, что функция $b(t)$ имеет стационарную точку $t^*$: $\dot{b}(t^*) = 0$. Выясним характер экстремума в точке $t^*$. Вычислим ее первую и вторую производные:

$$\dot{b}(t^*) = r\, e^{rt^*} [\, b_0 + \int_0^{t^*} A(t)\, e^{-rt} dt \,] + A(t^*) = 0,$$

$$\ddot{b}(t^*) = r^2 e^{rt^*} [b_0 + \int_0^{t^*} A(t)\, e^{-rt} dt \,] + \dot{A}(t^*) + r\, A(t^*) =$$

$$= - r\, A(t^*) + A(t^*) + r\, A(t^*) = \dot{A}(t^*).$$

Таким образом, если $\beta > r$, то $c(t)$ убывает, а $A(t)$ возрастает, следовательно, $\ddot{b}(t^*) > 0$, то есть, $t^*$ – точка минимума $b(t)$ и, очевидно, единственная. Если же $\beta < r$, то $t^*$ – единственная точка максимума $b(t)$. Если внутри нет стационарной точки, то $b(t)$ изменяется монотонно.

Поведение $b(t)$ изображено на рисунках 2.6 и 2.7.

Выписанные выше условия принципа максимума являются необходимыми.

Предположим, что уравнения (2.20) и (2.22) имеют решения, по которым определяются переменные $k^*$, $b^*(t)$, $c^*(t)$ и $u^*(t)$. Мы утверждаем, что это и есть решение исходной задачи. Это следует из того, что функция Понтрягина

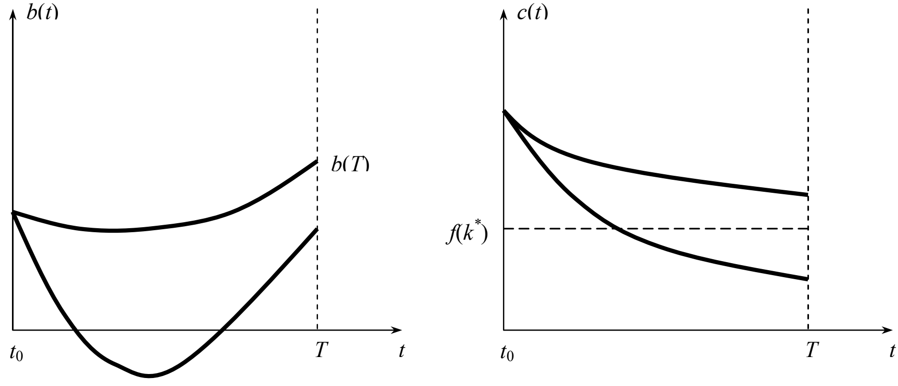


*Рис. 2.6. Случай $\beta > r$*

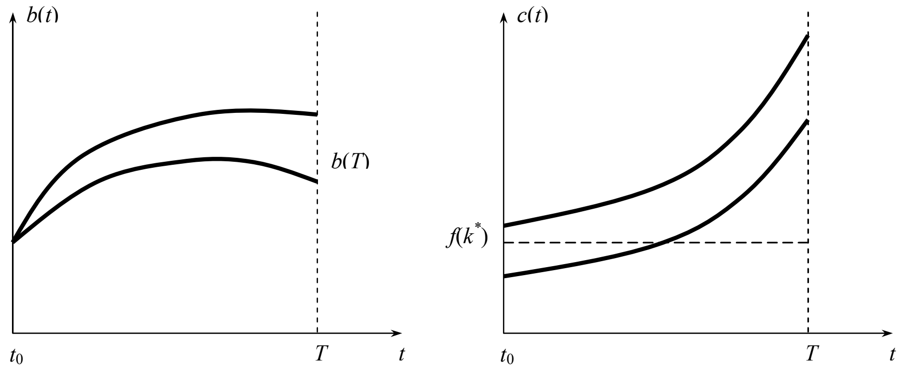


*Рис. 2.7. Случай $\beta < r$*

вогнута по совокупности переменных $k, b, c, u$ (вспомним, что $\psi_1$ и $\psi_2$ положительны). Это свойство является достаточным условием того, что найденная из принципа максимума экстремаль является решением задачи.

Рассмотрим теперь более сложный случай.

**7.** Модель поведения потребителя с ограничениями на управление. Рассматривается та же модель, что и в примере 4:

$$\max \int_0^T U(c)e^{-\beta t}\, dt,$$

$$\dot{k} = u,$$

$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u, \quad t \in [0, T].$$

Граничные условия теперь имеют вид:

$$k(0) = k_0, \quad b(0) = b_0, \quad k(T) + b(T) \geq W_T,$$

где $k_0 > 0$, $b_0 > 0$, $W_T > k_0 + b_0$.

Задано ограничение на управление $u$: $|u| \leq 1$, означающее, что рост капитала, как и его преобразование в потребительский продукт, не может быть мгновенным. Для определенности будем считать, что $\beta > r$.

Функция Понтрягина $H$ и сопряженная система имеют тот же вид, что и в предыдущем случае:

$$H = \psi_0 U(c) e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 (f(k) + rb - c - u) .$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 f'(k)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_2 r$$

Условие максимума $H$ по $c$ и $u$ дает соотношения

$$\psi_0 U'(c)\, e^{-\beta t} = \psi_2 ,$$

$$(\psi_1 - \psi_2 )u \to \max_{u:|u|\leq 1} .$$

Отсюда заключаем, что $\psi_0$ можно считать равным 1,

$$\psi_2(t) = \psi_2(0)\, e^{-rt}, \quad c = C(t, \psi_2(0)),$$

и, кроме того,

$$u = \mathrm{sgn}(\psi_1 - \psi_2),$$

где при $\psi_1 = \psi_2$ значение $u \in [-1, 1]$.

Условие трансверсальности на правом конце дает: $\psi_1(T) = \psi_2(T) \geq 0$, причем, очевидно, неравенство выполняется строго.

Рассмотрим закон изменения разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$:

$$(\dot{\psi_1 - \psi_2}) = \psi_2(0)\, e^{(\beta - r)t} (r - f'(k(t))). \tag{2.23}$$

Пусть $k^*$ – такое, что $r = f'(k^*)$. Покажем, что:

- при $k_0 < k^*$ применяется управление $u = 1$, пока $k(t) < k^*$,
- при $k_0 > k^*$ применяется управление $u = -1$, пока $k(t) > k^*$,
- при $k_0 = k^*$ применяется управление $u = 0$, пока $k(t) = k^*$.

Пусть $k_0 < k^*$. Утверждаем, что тогда $\psi_1(0) > \psi_2(0)$. Допустим обратное, т.е. $\psi_1(0) \leq \psi_2(0)$. Так как $f'(k_0) > f'(k^*) = r$, а фазовая переменная $k(t)$ непрерывна, то в окрестности точки $t = 0$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает в силу (2.23), а $u = -1$. Уменьшение капитала приведет только к дальнейшему уменьшению отрицательной разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ и сохранению управления $u = -1$. Такая траектория $(\psi_1(t), \psi_2(t))$, будучи продолженной до $t = T$, не удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце: $\psi_1(T) = \psi_2(T)$. Поэтому, если оптимальная траектория существует, а мы это предполагаем, то $\psi_1(0) > \psi_2(0)$.

Управление $u = 1$ применяется до тех пор, пока $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, при этом $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает. Представляются две возможности, согласующиеся с условием трансверсальности: разность достигает нуля либо в момент $t = T$, либо при некотором $t = t^* < T$.

В первом случае получаем экстремаль:

$$k(t) = k_0 + t, \qquad b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau, \psi_2(0))]d\tau,$$

где $\psi_2(0)$ находится из условия $b(T) = W_T - (k_0 + T)$.

При этом $k(T) = k_0 + T \le k^*$. Действительно, если $k(t') = k^*$ при $t' < T$, то на отрезке $[t', T]$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ будет возрастать и условие трансверсальности не будет выполнено.

Во втором случае $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, $t^* < T$. Мы утверждаем, что в этот момент и капитал достигает значения $k(t^*) = k_0 + t^* = k^*$. Действительно, это не могло произойти раньше, так как тогда бы изменился на положительный знак скорости $(\dot{\psi_1 - \psi_2})$ и равенство $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$ было бы невозможно. Также не могло это произойти позже (или вовсе не произойти), так как тогда в момент $t^*$ изменится знак разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$, капитал начнет убывать, увеличивая по абсолютной величине разность и, тем самым, исключая выполнение равенств $k(t') = k'$ при $t' > t^*$ или $\psi_1(T) = \psi_2(T)$.

Как только достигаются равенства $k_0 + t^* = k^*$, $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, при $t > t^*$ они должны сохраняться. Действительно, если, например, на каком-то интервале, ближайшем к точке $t^*$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, то $k$ вырастет по сравнению с $k^*$ и, значит, $(\dot{\psi_1 - \psi_2}) > 0$ на этом интервале. Возрастание разности будет поддерживать управление $u = 1$, что приведет к еще большему возрастанию разности. В результате будет нарушено условие трансверсальности.

Во втором случае получаем экстремаль, состоящую из двух участков:

$$k(t) = k_0 + t,\ \ b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\,d\tau \ \text{ при } t \in [0, t^*],$$

$$k(t) \equiv k^*,\ \ b(t) = e^{rt}(b(t^*) + \int_{t^*}^t [f(k^*) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\,d\tau \ \text{ при } t \in [t^*, T].$$

Неизвестные $\psi_2(0)$ и $t^*$ находятся из условий $k_0 + t^* = k^*$ и $b(T) = b_T$. Неизвестное $\psi_1(0)$ находится из условия $\psi_1(T) = \psi_2(T)$ путем интегрирования уравнения (2.23).

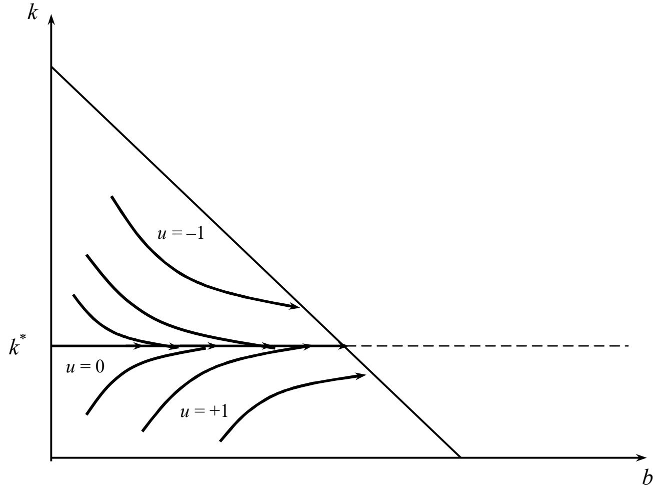


*Рис. 2.8.*

Легко определить, какой из двух случаев реализуется: если $k_0 + T \le k^*$, то имеем экстремаль первого типа, если $k_0 + T > k^*$, то имеем экстремаль второго типа, причем точкой переключения управления с $u = 1$ на $u = 0$ является $t^* = k^* - k_0$.

Аналогичный анализ можно провести для случая $k_0 > k^*$.

Результирующие фазовые траектории $(b(t), k(t))$ приведены на рисунке 2.8.

**8.** Синтез оптимальных управлений. Рассмотрим задачу:

$$\max \int_0^{t_1} (ux + u^2/2)\, dt$$

$$\dot{x} = -\frac{x}{4} + u, \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 4 \ln 2,$$

$$u\colon |u| \le 1,\ x(0) = x_0,\ x(t_1) \text{ – свободно.}$$

Функция Понтрягина $H$ и сопряженная система имеют вид:

$$H = \psi_0 (ux + u^2/2) + \psi_1 \left(-\frac{x}{4} + u\right),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_0 u + \psi_1/4, \qquad \psi_1(t_1) = 0,$$

где $\psi_0 = const \le 0$.

Исследуем вырожденный случай. Если $\psi_0 = 0$, то из сопряженной системы получаем $\psi_1(t) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому $\psi_0 < 0$.

Положим далее $\psi_0 = -1$. Условие максимума функции $H$ по $u$ дает соотношение (опустим индекс 1 у $\psi_1$):

$$-ux - u^2/2 + \psi u \to \max.$$

Получаем, что

$$u = 1, \text{ если } \psi - x \ge 1,$$
$$u = -1, \text{ если } \psi - x \le -1,$$
$$u = \psi - x, \text{ если } -1 < \psi - x < 1.$$

В частности, при $t = t_1$ условие трансверсальности позволяет разбить терминальное множество $\{(t, x)\colon t = t_1, x \in R\}$ на три части:

$$A = \{x\colon x \le -1\}, u(t_1) = +1,$$
$$B = \{x\colon x \ge 1\}, u(t_1) = -1,$$
$$C = \{x\colon -1 < x < 1\}, \ u(t_1) = -x(t_1).$$

Переключение с одного режима на другой происходит на линиях

$$X_+\colon \ \psi - x = 1 \text{ и } X_-\colon \ \psi - x = -1.$$

Чтобы выписать эти условия и построить линии $X_+$ и $X_-$ положим $u = \psi - x$ и проинтегрируем систему :

$$\dot\psi = 5\psi/4 - x, \qquad (2.24)$$
$$\dot x = \psi - 5x/4$$

с граничными значениями $x(t_1) = x_1 \in C$, $\psi(t_1) = 0$.

Собственные числа и собственные векторы матрицы системы равны:

$$\lambda_1 = 3/4, \ h_1 = (2, 1); \ \lambda_2 = -3/4; \ h_2 = (1, 2).$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\psi(t) = 2C_1 e^{3t/4} + C_2 e^{-3t/4},$$
$$x(t) = C_1 e^{3t/4} + 2C_2 e^{-3t/4},$$

откуда, с учетом условия трансверсальности получаем

$$\psi(t) = 2C_1 e^{\frac{3}{4}t}(1 - e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)}),$$
$$x(t) = C_1 e^{\frac{3}{4}t}(1 - 4e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)}).$$

Из условия $x(t_1) = x_1$ находим $C_1$: $C_1 = -x_1 e^{-\frac{3}{4}t_1}/3$.

Разность $(\psi - x)$ при этом равна:

$$\psi - x = C_1 e^{3t/4} + 2C_1 e^{3t/4} e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)} = -x_1 e^{-\frac{3}{4}(t_1 - t)}(1 + 2e^{\frac{6}{4}(t_1 - t)})/3. \qquad (2.25)$$

Обозначим для простоты $z = e^{-\frac{3}{4}(t_1 - t)}$ – "новое время". Тогда $z = 1$ при $t = t_1$ и

$$z = e^{-3\ln 2} = 2^{-3} \text{ при } t = 0.$$

Решение для $x(t)$ и для разности $\psi - x$ при этом можно записать в виде:

$$X = -x_1(z - 4z^{-1})/3,$$
$$\psi - x = -x_1(z + 2z^{-1})/3.$$

Выразим из первого соотношения $x_1$ и подставим во второе, затем приравнивая его + 1 и – 1, получим линии переключения:

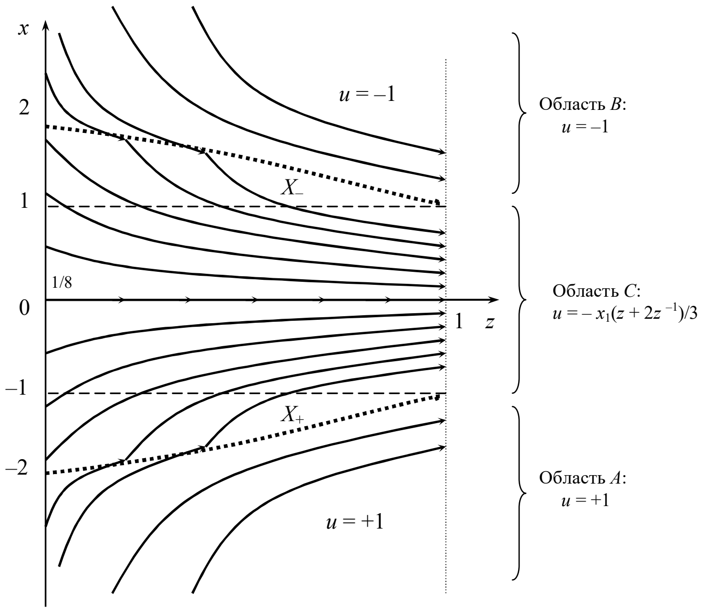


*Рис. 2.9.*

$$X_{+} = (z^2 - 4)/\,(z^2 + 2),\;\; X_{-} = (-\,z^2 + 4)/\,(z^2 + 2).$$

Как видим, $X_{-} = -\,X_{+}$ .

Теперь может быть построена картина фазовых траекторий (рис. 2.9).

1. Если $x_1 = 0$, то из системы (2.24) с граничными значениями

$$x(t_1) = 0,\;\; \psi(t_1) = 0$$

получаем решение $\psi(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$.

2. В зоне $C$ при малых $|x_1|$ малы будут и значения $|X|$, поэтому траектории $x(t)$, выходящие (попятным движением) из точки $x_1$, не достигают линий переключения $X_{-}$ и $X_{+}$; управление будет определяться из (2.25) как

$$u(t) = -\,x_1(z + 2z^{-1})/3.$$

3. Если значения $x_1$ лежат в зоне $C$, но $|x_1|$ достаточно велико, точка пересечения траектории $x(t) = -x_1(z - 4z^{-1})/3$ и линии переключения $X_{+}$, например (при $x_1 < 0$), находится из равенства:

$$-\,x_1(z^2 - 4)/3z = (z^2 - 4)/\,(z^2 + 2),$$

откуда $z^2 + 3z/x_1 + 2 = 0$. Корни этого уравнения

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2x_1} \pm \sqrt{\frac{9}{4x_1^2} - 2}\,.$$

Выбор конкретной точки переключения определяется краевым условием. Например, при $x_1 = -1$ допустимой является только $z = 1$. При $x_1 = -0.9$ годится корень $z \sim 0.8$. Знак $x_1$ определяет знак точки переключения $X$, а момент $z$ не зависит от знака $x_1$.

4. Выше и ниже оси $z$ картина симметричная. Переключения имеют только траектории выходящие из зоны $C$.
5. Ниже линии $X_+$ имеем $\psi - x > 1$, откуда $u \equiv +1$. При этом траектории $x(t)$ идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} + 1$ до момента переключения или до конца.

   Выше линии $X_-$ $\psi - x < -1$ и там $u \equiv -1$. Траектории идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} - 1$ до момента переключения или до конца.
6. Наконец, заметим, что переключение возможно не более одного раза, так как величина $(\psi - x)$ монотонна, причем ее производная по времени имеет такой же знак, как и $x_1$. Например, если $x_1 < 0$ в зоне $C$ и $\psi - x = +1$, то точка находится на линии $X_+$. Но в силу монотонности $(\psi - x)$ становится далее меньше 1, то есть, траектория $x(t)$ остается в области, порождаемой множеством $C$.

**Упражнения**

1. Найти оптимальное управление в задачах:

а). $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \min.$

б). $\int_0^T u^2 dt + T \to \min;$ $\quad \dot{x} = u;\ x(0) = 1;\ x(T) = 0;$ $\quad T$ – не фиксировано.

в). $\int_0^T (1-u)x dt \to \max;$ $\quad \dot{x} = (u - \beta)x;\ x(0) = a;\ 0 \le u \le 1;\ \beta \le 1;$ $\quad T$ – фиксировано.

г). $\int_0^T (u^2 + x^2)dt + \dfrac{x^2(T)}{2} \to \min;$ $\quad \dot{x} = u - x;\ x(0) = 0;$ $\quad T$ – фиксировано.

д). $\int_0^T (u - x)^2 dt \to \min;$ $\quad \dot{x} = \rho(u - x);\ x(0) = x_0;\ x(T) = x_1;$ $\quad T$ – фиксировано.

е). $\int_0^{2\pi} u dt + x_2(2\pi) \to \min;$ $-1 \le u \le 2;$ $\dot{x}_1 = -x_2;$ $\dot{x}_2 = x_1 + u;$ $x_1(0) = -2;$ $x_2(0) = -1.$

2. В задаче

$$\int_0^2 (2x - 3u - au^2)dt \to \max; \quad \dot{x} = x + u;\ x(0) = 5;\ 0 \le u \le 2;$$

исследовать оптимальный процесс при различных значениях параметра $a \in [0, 1]$.

3. Найти оптимальное управление в задаче на быстродействие

$$T \to \min; \quad x(0) = x_{01};\ \dot{x}(0) = x_{02};\ x(T) = 0;\ \dot{x}(T) = 0;\ |u| \le 1,$$

если изменение состояния системы происходит согласно закону:

а). $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u$;

б). $\ddot{x} + \pi^2 x = \pi u$;

в). $\ddot{x} = x + u$;

4. Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея в непрерывном времени:

$$\int_0^T e^{-\beta t} U(c)dt \to \max; \quad \dot{s} = \rho s - c;\ s(0) = s_0 > 0;\ s(T) = 0;$$

$0 \le c \le s$; $\beta < \rho$; $\rho > 1$; $T$ – фиксировано, если:

а). $U(c) = \ln c$;

б). $U(c) = c^{1-\mu}$; $\mu < 1$.

## 3. Фазовые ограничения в задаче оптимального управления.

В рассмотренной нами выше постановке задачи оптимального управления предполагалось, что область изменения фазовой координаты $x(t)$ неограничена и совпадает со всем пространством $\mathsf{R}^n$. Однако на практике часто встречаются задачи, в которых имеются ограничения на множество допустимых состояний системы. Особенно это актуально в экономических задачах, где часто накладываются ограничения на неотрицательность фазовых переменных (например, объема выпуска, величины производственной мощности и т.д.). Поэтому рассмотрим далее постановку задачи оптимального управления, учитывающую наличие фазовых ограничений. Моменты $t_0$, $t_1$, а также начальное состояние $x_0$ будем считать фиксированными.

Пусть требуется найти максимум функционала:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(x(t_1)) \to \max, \tag{3.1}$$

если закон изменения состояния системы имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{3.2}$$

и дополнительно наложены фазовые ограничения:

$$g(t, x(t)) \geq 0;\ t \in [t_0, t_1], \tag{3.3}$$

где $g : \mathsf{R} \times \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^s$ – непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов.

Рассмотрим *лагранжиан* данной задачи:

$$L(t, x(t), u(t), \psi(t), \mu(t), \lambda_0) = H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0) + (\mu(t), g(t, x(t))) \tag{3.4}$$

где $H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)$ – функция Понтрягина; $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathsf{R}^n$ – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (3.3) .

Тогда для данной задачи справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ – оптимальный процесс в задаче (3.1) – (3.3). Тогда найдутся не равные одновременно нулю множитель $\lambda_0 \geq 0$ и вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in \mathsf{R}^n$ и $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathsf{R}^s$ такие, что:

а). всюду на $[t_0, t_1]$ выполнено условие принципа максимума:

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg\,max}\,(H(t, x^*(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)); \tag{3.5}$$

б). сопряженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial L}{\partial x_i(t)}; \quad i = 1,\ldots,n, \tag{3.6}$$

(где $L$ – лагранжиан задачи) и условия трансверсальности на правом конце (2.7), в данной постановке имеющие вид:

$$\psi_i(t_1) = \lambda_0 \frac{\partial \Phi_0(x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)};$$

в). выполнены условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа $\mu(t)$:

$$\mu_i(t)\, g_i(t, x(t)) = 0; \quad \mu_i(t) \ge 0; \quad i = 1,\ldots, s. \tag{3.7}$$

**Примеры**

**1.** Найти оптимальное управление в задаче [1]:

$$J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2 + x^2)dt \to \min;$$

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = 1; \quad u \in \mathrm{R};$$

$$x(t) \ge c \quad \forall t \in [0, 1].$$

Р е ш е н и е . При отсутствии фазового ограничения оптимальное управление в данной задаче можно найти, используя принцип максимума для задачи со свободным правым концом, описанный в предыдущем разделе. Оптимальным решением задачи будет являться :

$$x^*(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{e^2 + 1}; \qquad u^*(t) = \dot{x}^*(\mathrm{t}). \tag{3.8}$$

Функция $x^*(t)$ монотонно убывает и достигает минимального значения при $t = 1$:

$$x^*(1) = \frac{2e}{e^2 + 1}.$$

Очевидно, что при $c \le \frac{2e}{e^2+1}$, решение задачи с фазовым ограничением будет совпадать с (3.8). Предположим, что $c > \frac{2e}{e^2+1}$. Применим необходимые условия экстремума. Функция Понтрягина будет иметь вид:

$$H = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u,$$

а лагранжиан задачи запишется как

$$L = H + \mu(x - c) = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u + \mu(x - c).$$

Видно, что в вырожденном случае ($\lambda_0 = 0$) функция $H$ является линейной по $u$, поэтому ее максимум достигается на конечных $u$ только при $\psi(t) \equiv 0$. Но тогда и $\mu \equiv 0$ (в силу (3.6)), что противоречит условиям теоремы. Поэтому далее можно положить $\lambda_0 = 1$.

Из условия (а) теоремы вытекает, что

$$u^*(t) = \psi(t).$$

Сопряженная функция $\psi(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\dot{\psi} = x - \mu, \quad \mu \geq 0, \quad \mu(x - c) = 0.$$

Подставляя данные выражения в основную систему, получим, что $x(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{x} = x - \mu, \quad x(0) = 1.$$

Из условия дополняющей нежесткости, при $x(t) > c$ $\mu(t) = 0$, и $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} = x, \quad x(0) = 1,$$

общим решением которого является

$$x(t) = Ae^{t} + Be^{-t}.$$

Далее, в силу непрерывности сопряженной функции $\psi(t)$, в первой точке контакта траектории $x(t)$ с фазовым ограничением $\tau$ выполнено условие:

$$\psi(\tau^-) = \psi(\tau^+) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(\tau^-) = \dot{x}(\tau^+) \text{ (так как } u^*(t) = \psi(t)\text{)},$$

откуда следует, что $\dot{x}(\tau) = 0$.

Таким образом, начальное условие, условие выхода на фазовое ограничение и условие непрерывности сопряженной функции дают систему уравнений для определения параметров $A$, $B$ и $\tau$:

$$x(0) = A + B = 1$$

$$x(\tau) = Ae^{\tau} + Be^{-\tau} = c$$

$$\dot{x}(\tau) = Ae^{\tau} - Be^{-\tau} = 0.$$

Решая данную систему, получаем:

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad B = \frac{1 \mp \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad \tau = \ln \frac{c}{1 \pm \sqrt{1-c^2}}.$$

Далее необходимо показать, что коснувшись ограничения $x(t) = c$ траектория останется на нем.

Заметим, что $\ddot{x} \geq 0$ при всех $t$. Поэтому траектория $x(t)$ выпукла вниз. Допустим, что она сошла с ограничения. Тогда далее до конца $x(t) > c$, причем правый конец свободен. Следовательно, $\psi(t_1) = 0$. Получаем, что $\psi(\tau) = \psi(t_1) = 0$, тогда как $\psi(t)$ строго возрастает вне ограничения. Противоречие показывает, что допущение неверно.

**2.** [3] Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея:

$$J(c, s) = \int_0^T U(c) e^{-\alpha t} dt \to \max; \quad T \text{ – фиксировано};$$

$$U' > 0; \quad U'' < 0; \quad U(0) = 0;$$

$$\dot{s} = \rho s - c; \quad s(0) = s_0; \quad s(T) = s_T; \quad c \geq 0;$$

при ограничении на величину сбережений $s(t)$:

$$s(t) \geq a > 0; \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Р е ш е н и е . Наряду с функцией Понтрягина задачи, имеющей вид

$$H = \lambda_0 U(c) e^{-\alpha t} + \psi(\rho s - c),$$

выпишем лагранжиан:

$$L = H + \mu(s - a).$$

Функция Понтрягина достигает максимума при конечных значениях $c(t)$ только при $\psi(t) > 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае она является вогнутой по $c(t)$ (рис. 3.1), и условие максимума дает следующий вид

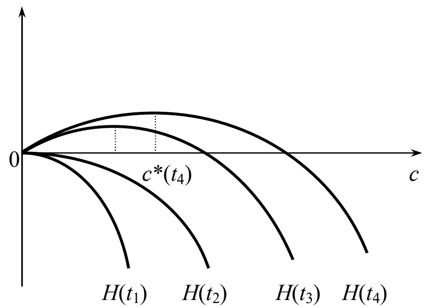


*Рис. 3.1*

оптимального управления

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } U'(0) \le \psi(t)e^{\alpha t} \\ (U')^{-1}(\psi(t)e^{\alpha t}), & \text{при } U'(0) > \psi(t)e^{\alpha t} \end{cases}$$

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид:

$$\dot\psi = -\rho\psi - \mu, \quad \mu(s-a) = 0, \quad \mu \ge 0.$$

Так как концы фазовой траектории $s(t)$ закреплены, то граничные условия для $\psi(t)$ неопределены.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $\alpha < \rho$. Покажем, что в этом случае $s^*(t) > a$ $\forall$ $t \in [0, T]$.

Предположим, что $s^*(\tau) = a$ для некоторого $\tau \in [0, T]$. Так как $c^*(t)$ непрерывна в точке $\tau$ и

$$\dot s^* = \rho s^* - c^*,$$

то $s^*(t)$ – непрерывно-дифференцируема в точке $\tau$. Кроме того, в силу фазового ограничения $\tau$ – точка минимума траектории $s^*(t)$ на $[0, T]$, поэтому $\dot s^*(\tau) = 0$. Вычислим $\ddot s^*(\tau)$ :

$$\ddot s^*(\tau) = \rho\dot s^*(\tau) - \dot c^*(\tau) = -\dot c^*(\tau),$$

где $\dot c^*(\tau)$ может быть найдено из соотношения $U'(c(t)) = \psi(t)e^{\alpha t}$ как

$$\dot c^*(\tau) = \frac{-\dot\psi(t)e^{\alpha t} - \alpha\psi(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))} = -\frac{\psi(t)(\rho-\alpha)e^{\alpha t} + \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}. \qquad (3.9)$$

Так как $\alpha < \rho$ и $U'' < 0$, то $\dot c^*(\tau) > 0$, откуда следует, что $\ddot s^*(\tau) < 0$. Это противоречит тому, что $\tau$ – внутренняя точка минимума траектории $s^*(t)$.

Таким образом, при $\alpha < \rho$ траектория $s^*(t)$ не имеет внутренних минимумов, а следовательно, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$ (рис. 3.2).

2. Рассмотрим теперь случай $\alpha > \rho$. Из (3.9) следует, что в этом случае над ограничением $s(t) = a$ нет внутренних максимумов. Это означает, что $\mu(\tau) = 0$, $\dot c^*(\tau) < 0$ и $\ddot s^*(\tau) > 0$ в любой точке $\tau \in [0, T]$, такой, что $\dot s^*(\tau) = 0$ и $s(t) > a$.

Траектории $s(t)$ в этом случае могут выходить на фазовое ограничение или все время оставаться выше его, описывая выпуклую кривую, в зависимости от начальных условий и $T$ (рис. 3.3).

На отрезке $[t_1, t_2]$ имеем $\dot s^*(\tau) = 0$ и $s(t) \equiv a$. Тогда $c(t) \equiv \rho\alpha > 0$.

Из условия максимума $H$ по $c(t)$:

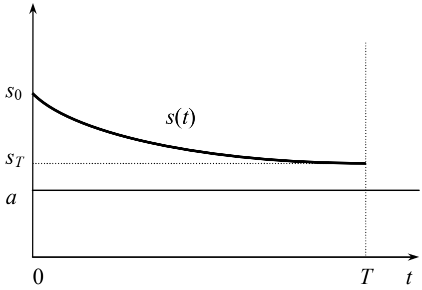


*Рис. 3.2*

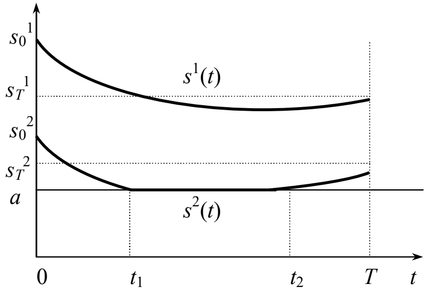


*Рис. 3.3*

$$U'(\rho\alpha) = \psi(t)e^{\alpha t},$$

откуда

$$\psi(t) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

Тогда

$$\dot{\psi} = -\,\alpha\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

С другой стороны, из сопряженной системы:

$$\dot{\psi} = -\,\rho\psi - \mu = -\,\rho\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} - \mu.$$

Из последних двух равенств получаем выражение для множителя Лагранжа $\mu$:

$$\mu(t) = (\alpha - \rho)\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} > 0.$$

Определим моменты выхода и схода с фазового ограничения $t_1$ и $t_2$.

Из условий непрерывности фазовой переменной $s(t)$ и сопряженной переменной $\psi(t)$ в точке $t_1$ имеем:

$$s(t_1^-) = s(t_1^+), \qquad \psi(t_1^-) = \psi(t_1^+), \tag{3.10}$$

где $s(t_1^-) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}c(\tau)d\tau) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau)$; $s(t_1^+) = a$;

$\psi(t_1^-) = \psi_0 e^{-\rho t_1}$; $\psi(t_1^+) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_1}$.

Для определения момента $t_2$ воспользуемся краевым условием:

$$s(T) = e^{\rho(T - t_2)}(a - \int_{t_2}^{T} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi(t_2)e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau) = s_T \tag{3.11}$$

где $\psi(t_2) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_2}$.

Таким образом, соотношения (3.10) и (3.11) позволяют определить все параметры оптимальной траектории $s^*(t)$.

Заметим, что специфика этой простой задачи позволила в явном виде выписать вид сопряженной функции $\psi(t)$ на границе $s(t) = a$, а затем независимо определить параметры $\psi_0$, $t_1$ и $t_2$. Неразрешимость соотношений (3.10) и (3.11) относительно $t_1$ и $t_2$ говорит о том, что оптимальная траектория $s^*(t)$, если она существует, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$ (т.е. соответствует случаю $s^1(t)$ на рис. 3.3). В этом случае параметры фазовой траектории отыскиваются аналогично задаче без фазовых ограничений.

Краевое условие будет иметь вид

$$s(T) = e^{\rho(T-t_2)}(s_0 - \int_0^T e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau) = s_T$$

откуда может быть получена константа $\psi_0$.

Подставив ее в выражения для $c^*(t)$ и $s^*(t)$:

$$c^*(t) = (U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)t});$$

$$s^*(t) = e^{\rho t}(s_0 - \int_0^T e^{-\rho\tau} c^*(\tau)d\tau).$$

получим явный вид оптимального процесса.

Если задача нахождения $\psi_0$ в данном случае также неразрешима, то исходная задача является неразрешимой, например, если отсутствуют допустимые траектории, переводящие систему из состояния $s_0$ в $s_T$.

Построим фазовый портрет движения системы в осях $(s, c)$. Для этого воспользуемся выражением (3.9) для $\dot{c}(t)$. Подставив в него

$$\psi(t) = U'(c(t))e^{-\alpha t},$$

получим:

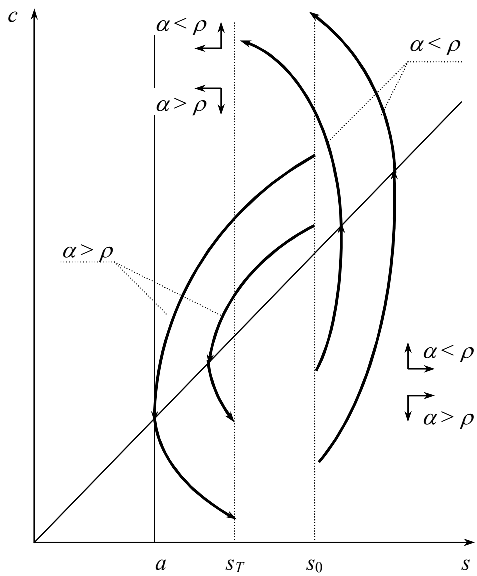

*Рис. 3.4*

$$\dot{c}(t) = \frac{(\alpha - \rho)U'(c(t)) - \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}; \quad \dot{s}(t) = \rho s(t) - c(t).$$

На рис. 3.4 приведены соответствующие данной системе фазовые траектории.

**Упражнения**

1. Определить минимум функционала

$$J(u, x) = \int_0^3 2x_1 dt,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 2,$$

при фазовом ограничении

$$x_1(t) \ge \alpha, \quad \alpha \le 0.$$

2. Найти максимум функционала

$$J(u, x) = -\int_0^3 x dt,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(3) = 1, \quad |u| \le 1,$$

при фазовом ограничении

$$x(t) \ge 0.$$

3. Проанализировать с помощью принципа максимума с фазовыми ограничениями, а также построить и прокомментировать фазовые диаграммы в координатах (s, c) для следующей задачи оптимального управления:

$$J(c, s) = \int_0^T \ln(1 + c)e^{-\beta t} dt \to \max, \quad T \text{ – фиксировано},$$

$$\dot{s} = \rho s - c, \quad s(0) = s_0, \quad s(T) = s_T, \quad c \ge 0, \quad s \ge a > 0.$$

Рассмотреть случаи $\beta > \rho$ и $\rho > \beta$.

## 4. Динамическое программирование и уравнение Беллмана.

Принцип Беллмана дает достаточные условия оптимальности процесса в задаче оптимального управления. Он базируется на следующем ключевом факте:

*Если кривая $x^*(t)$ является оптимальной траекторией в задаче управления динамической системой на отрезке времени $[t_0, T]$, с некоторым начальным условием $x(t_0) = x_0$, то для любого момента времени $\tau \in [t_0, T]$ оптимальным решением задачи управления системой на отрезке времени $[\tau, T]$ с начальным условием $x(\tau) = x^*(\tau)$ будет являться участок той же самой траектории $x^*(t)$* (см. рис. 4.1).

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_1, x(t_1)) \to \max. \qquad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (4.2)$$

$$u(t) \in U_t, \qquad (4.3)$$

и пусть $J^*$ – значение функционала на оптимальном ее решении $(x^*(t), u^*(t))$.

Теперь для произвольного момента времени $\tau \in [t_0, T]$ и произвольной точки фазового пространства $y$ положим в задаче (4.1) – (4.3) $t_0 = \tau$, $x(\tau) = y$. Функцию $J^*(\tau, y)$, равную значению функционала на оптимальном решении такой задачи, будем называть *функцией Беллмана* или *функцией выигрыша*.

Отметим, что $J^* = J^*( t_0, x_0)$.

Исследуем теперь изменение функции $J^*(t, x)$ с течением времени вдоль оптимальной траектории системы, то есть, при $x = x^*(t)$.

Рассмотрим малое приращение времени $dt$. За это время система перейдет в новое состояние

$$x^*(t + dt) \approx x^*(t) + dx^*(t),$$

где, из (4.2),

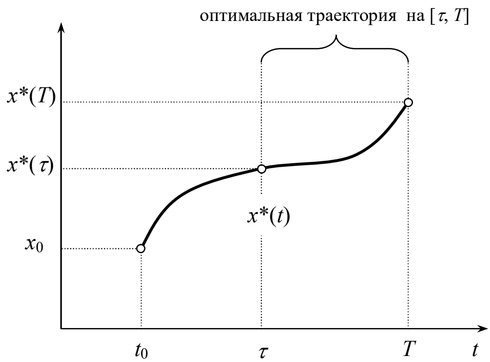


*Рис. 4.1*

$$dx^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))dt.$$

Изменение значения функционала (4.1) на отрезке $[t,\ t + dt]$. может происходить только за счет интегральной его части и приближенно составляет

$$\int_t^{t+dt} F(t, x^*(t), u^*(t))dt \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt,$$

а оставшаяся часть, согласно принципу оптимальности Беллмана, будет равна $J^*(t + dt, x^*(t + dt))$. Таким образом, получено следующее рекуррентное соотношение:

$$J^*(t, x^*(t)) \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt + J^*(\ t + dt, x^*(t + dt)). \tag{4.4}$$

Теперь, пользуясь оптимальностью $u^*(t)$, можем переписать (4.4) следующим образом:

$$J^*(t, x(t)) \approx \max_{u(t)\in U_t} \{F(t, x(t), u(t))dt + J^*(\ t + dt, x(t + dt))\}. \tag{4.5}$$

Далее, в предположении дифференцируемости $J^*(t,\ x)$ по своим аргументам, переходя к пределу при $dt \to 0$ и учитывая (4.2), получим следующее соотношение:

$$-\frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t} = \max_{u(t)\in U_t} \{F(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))\}. \tag{4.6}$$

Соотношение (4.6) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для определения функции $J^*(t,\ x)$. Оно называется *уравнением Беллмана в дифференциальной форме*.

Краевым условием для данного уравнения является оптимальное значение функционала при $t = t_1$, равное терминальному члену:

$$J^*(t_1, x(t_1)) = \Phi_0(t_1, x(t_1)). \tag{4.7}$$

Как правило, аналитическое решение уравнения (4.6) найти довольно сложно или вовсе невозможно. Поэтому прибегают к дискретизации задачи (4.1) – (4.3) с последующим ее численным решением. Дискретная задача формулируется следующим образом:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i\ +\ \Phi_0(x_N) \to \max. \tag{4.8}$$

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad x_0 \text{ – задано.} \tag{4.9}$$

$$u_i \in U_i, \tag{4.10}$$

Отметим, что в дискретной задаче состояние системы будет описываться вектором $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{R}^{N+1}$, а управление – вектором $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) \in \mathrm{R}^N$.

Для (4.8) – (4.10) уравнение Беллмана будет иметь следующий вид:

$$J_i^*(x_i) = \max_{u_i \in U_i} \{F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i + J_{i+1}^*(f(x_i, u_i))\}, \qquad (4.11)$$

с краевым условием

$$J_N^*(x_N) = \Phi_0(x_N).$$

Решение задачи (4.11) при заданных краевых условиях производится последовательным решением уравнения (4.11) для шагов $i = N–1, N–2, \ldots, 0$ (обратный ход метода Беллмана). При этом на каждом шаге получается оптимальное управление $u_i^*$ как функция от текущего состояния системы $x_i$.

На втором этапе по полученным функциям $u_i^*(x_i)$ производится *синтез оптимального управления* для задачи с конкретным начальным условием $x_0$.

Таким образом, метод динамического программирования, в отличие от рассмотренных выше необходимых условий, дававших оптимальное управление как функцию времени $u^*(t)$ (*программное управление*), позволяет определять оптимальное управление как функцию состояния системы $u^*(t, x)$ (*синтезированное управление*), что дает возможность отыскивать решение сразу для целого класса задач с различными начальными условиями.

Далее будем считать, что в функционал задачи время не входит явно. Положим шаг $\Delta t_i$ равным 1. Введем понятие *горизонта планирования* как количества шагов, оставшихся до завершения управления. Обозначим

$$V_k(x) = J_{N-k}^*(x),$$

т.е. максимальный выигрыш, который можно получить за $k$ шагов, если начать из состояния $x$. В этом случае рекуррентное соотношение для $V_k(x)$ принимает вид:

$$V_k(x) = \max_{u \in U} \{F(x, u) + V_{k-1}(f(x, u)), \qquad (4.12)$$

с краевым условием: $V_0(x) = \Phi_0(x)$.

**Примеры**

**1**. Задача распределения ресурса. Имеется некоторый ресурс в объеме $a > 0$, который необходимо распределить между $N$ агентами, так, чтобы максимизировать их суммарную полезность, если функция полезности $i$-го агента

$$F_i(u_i) = \ln u_i,$$

где $u_i$ – объем ресурса, получаемый $i$-м агентом. (Считаем, что агенты как-то перенумерованы.)

Решение. В формальной постановке задача имеет вид:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \ln u_i \to \max; \tag{4.13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \le a; \quad a > 0.$$

Приведем ее к задаче оптимального управления. Для этого необходимо выделить переменную, являющуюся аналогом времени (номера шага) в задаче оптимального управления, горизонта планирования, а также параметры состояния и управления в каждый момент времени.

Пусть номером шага в задаче является номер агента $i$, для которого принимается решение о распределении ресурса. Тогда величина $u_i$ будет являться управлением на $i$-м шаге. Введем параметр состояния системы $x_i$ как объем ресурса, имеющийся к $i$-му шагу ($i = 1, N$). Тогда, из условия задачи получаем

$$x_{i+1} = x_i - u_i; \qquad x_1 = a. \tag{4.14}$$

Так как может быть распределено ресурса не более, чем имеется в наличии, то имеет место ограничение на управление

$$0 \le u_i \le x_i. \tag{4.15}$$

Таким образом, (4.13) – (4.15) представляет собой задачу оптимального управления в дискретном времени. Решим ее с использованием принципа Беллмана. Обозначим через $V_k(x)$ значение функции выигрыша, когда горизонт планирования равен $k$, т.е. ресурс $x$ распределяется между $k$ агентами (не важно, что последними, так как все агенты имеют одинаковые функции полезности).

Рассмотрим последний шаг в нашей задаче, который имеет место после того, как ресурс полностью распределен между всеми агентами. Согласно краевому условию функция Беллмана $V_0$ на этом шаге равна

$$V_0(x) = \Phi_0(x) \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ресурс должен быть распределен одному агенту. В этом случае горизонт планирования $k = 1$ и рекуррентное соотношение (4.12) принимает вид

$$V_1(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_0(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u \} = \ln x ,$$

откуда $u_N^*(x) = x$.

Аналогично, при горизонте планирования $k = 2$ имеем:

$$V_2(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_1(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + \ln(x - u)\}.$$

Максимум выражения в фигурных скобках по $u \in [0, x]$ достигается при $u^*(x) = \frac{x}{2}$, при этом $V_2(x) = 2 \ln \frac{x}{2}$. Значит, оптимальное управление в этой ситуации $u_{N-1}^*(x) = \frac{x}{2}$.

Покажем далее, что для горизонта $k = 0,\dots, N$ оптимальное управление на шаге $(N + 1 - k)$ и функция Беллмана горизонта $k$ имеют вид:

$$u_{N+1-k}^*(x) = \frac{x}{k}, \qquad V_k(x) = k \ln \frac{x}{k}. \tag{4.16}$$

Предположим, что это верно на некотором шаге $(N + 1 - k)$. Определим оптимальное управление и функцию Беллмана горизонта $k$:

$$V_{k+1}(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_k(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + k \ln \frac{x-u}{k} \}.$$

Обозначим

$$A(u) = \ln u + k \ln \frac{x-u}{k}.$$

Условия первого порядка максимума функции $A(u_{N-k})$ имеют вид:

$$\frac{dA}{du} = \frac{1}{u} - \frac{k}{x-u} = 0,$$

откуда

$$u_{N-k}^*(x) = \frac{x}{k+1}, \quad V_{k+1}(x) = (k+1) \ln \frac{x}{k+1}.$$

Таким образом, определен общий вид оптимального управления для произвольного шага в задаче. Теперь проведем синтез оптимального управления для задачи с $N$ агентами и начальным объемом ресурса, равным $a$:

$$u_1^*(x_1) = \frac{x_1}{N} = \frac{a}{N}; \quad x_2 = x_1 - u_1^* = a - \frac{a}{N} = \frac{a(N-1)}{N};$$

$u_2^*(x_2) = \dfrac{x_2}{N-1} = \dfrac{a}{N}$; $\quad x_3 = x_2 - u_2^* = \dfrac{a(N-1)}{N} - \dfrac{a}{N} = \dfrac{a(N-2)}{N}$;

…

$u_k^*(x_k) = \dfrac{x_k}{N+1-k} = \dfrac{a}{N}$; $\quad x_{k+1} = x_k - u_k^* = \dfrac{a(N+1-k)}{N} - \dfrac{a}{N} = \dfrac{a(N-k)}{N}$;

…

Таким образом, в данной задаче оптимальным является равномерное распределение ресурса между агентами:

$$u^* = \left(\frac{a}{N}, \frac{a}{N}, \ldots, \frac{a}{N}\right).$$

**2.** Модель Рамсея в дискретном времени. Найти оптимальное потребление $c_t$, максимизирующее функцию полезности агента за $T$ периодов времени с учетом дисконтирования:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(c_t) \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1.$$

если $U(c_t) = c_t^{1-\mu}$, $\quad 0 < \mu < 1$.

Определить предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$ (если она есть).

Решение. Для данной задачи рекуррентное соотношение (4.12) примет вид:

$$V_l(s) = \max_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_{l-1}(\rho(s-c))\}.$$

Вычислим $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$ и определим общий вид $V_l(s)$:

$V_0 = \Phi_0(s_T) \equiv 0$,

$V_1(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_0(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu}\} = s^{1-\mu}$, $\quad c_{T-1}(s) = s$,

$V_2(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_1(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}\}$.

Обозначим $A_2(c) = c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}$, и определим $c$, доставляющее максимум $A_2(c)$:

$$\frac{dA_2}{dc} = (1-\mu)c^{-\mu} - \beta(1-\mu)\rho^{1-\mu}(s-c)^{1-\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \frac{s}{1+d}, \text{ где } d = (\beta\rho^{1-\mu})^{1/\mu}.$$

Таким образом:

$$V_2(s) = (1+d)^{\mu} s^{1-\mu}, \quad c_{T-2}(s) = \frac{s}{1+d}.$$

Далее,

$$V_3(s) = \max_{0\le c\le s}\{c^{1-\mu} + \beta V_2(\rho(s-c))\} = \max_{0\le c\le s}\{c^{1-\mu} + \beta(1+d)^{\mu}(\rho(s-c))^{1-\mu}\}.$$

Обозначим $A_3(c) = c^{1-\mu} + \beta(1+d)^{\mu}(\rho(s-c))^{1-\mu}$. Условие максимума $A_3(c)$ имеет вид

$$\frac{dA_3}{dc} = (1-\mu)c^{-\mu} - (1-\mu)(1+d)^{\mu} d^{\mu} (s-c)^{-\mu} = 0 \quad\Rightarrow\quad c^* = \frac{s}{1+d+d^2}.$$

Тогда

$$V_3(s) = (1+d+d^2)^{\mu} s^{1-\mu},\quad c_{T-3}(s) = \frac{s}{1+d+d^2}.$$

Проверим, что для произвольного шага $n$ выполнено:

$$V_n(s) = s^{1-\mu}\,(\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu},\quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n-1} d^k}. \tag{4.17}$$

Допустим, что (4.17) выполнено для некоторого $n$. Определим вид $V_{n+1}(s)$ и $c_{T-n-1}(s)$.

$$V_{n+1}(s) = \max_{0\le c\le s}\{c^{1-\mu} + \beta V_n(\rho(s-c))\} = \max_{0\le c\le s}\{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}(\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu}\}.$$

Выписывая аналогично предыдущим рассуждениям условия экстремума первого порядка для функции $A_{n+1}(c)$, получим

$$c^* = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k}.$$

Тогда

$$V_{n+1}(s) = s^{1-\mu}\,(\sum_{k=0}^{n+1} d^k)^{\mu},\quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальное управление в данной задаче будет иметь вид

$$c_t^*(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}.$$

Тогда оптимальная траектория системы $s_t^*$ (объем сбережений при оптимальном потреблении) определяется рекуррентно из соотношения

$$s_{t+1}^* = \rho(s_t^* - c_t^*(s_t^*)) = \rho(s_t^* - \frac{s_t^*}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}) = \rho d\frac{\sum_{k=0}^{T-t-2} d^k}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}\, s_t^*,\quad s_0^* = s_0.$$

Определим теперь предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$. Видно, что функция $V_n(s)$ имеет конечный предел при $n \to \infty$ только если $d < 1$:

$$V(s) = \lim_{n\to\infty} V_n(s) = \lim_{n\to\infty} s^{1-\mu} \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right)^{\mu} = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}.$$

При этом

$$c(s) = \lim_{n\to\infty} c_n^*(s) = (1-d)s.$$

Управление $c(s)$ по определению полагается решением задачи с бесконечным горизонтом планирования

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{1-\mu} \to \max_{0\le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 \text{ – задано.}$$

При этом функция $V(s)$ является решением операторного уравнения Беллмана для данной задачи

$$V = BV,$$

где оператор $B$ определен на классе **W** непрерывных, вогнутых, монотонных функций $\Phi$: $\mathrm{R}^1 \to \mathrm{R}^1$, таких, что $\Phi(0) = 0$ и действует по формуле

$$B\Phi(s) = \max_{0\le c\le s} \{c^{1-\mu} + \beta\Phi(\rho(s-c))\}.$$

Действительно, проверим, что

$$V(s) = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = \max_{0\le c\le s} \left\{c^{1-\mu} + \beta\frac{(\rho(s-c))^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}\right\}.$$

Из условий максимума функции в фигурных скобках получаем:

$$c^{-\mu} - \beta\rho^{1-\mu}\frac{(s-c)^{-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = c^{-\mu} - d^{\mu}\frac{(s-c)^{-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = s(1-d) = c(s).$$

Но тогда

$$BV(s) = s^{1-\mu}(1-d)^{1-\mu} + d^{\mu}s^{1-\mu}d^{1-\mu}\frac{1}{(1-d)^{\mu}} = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}.$$

Таким образом, решение задачи с бесконечным горизонтом планирования

$$c(s) = (1-d)s.$$

Оно не зависит от момента времени $t$, а определяется только текущим состоянием системы $s$. Такое решение называется *стационарным*. Для определения соответствующей ему траектории $s_t$ найдем *переходное отображение* $Y(\cdot)$:

$$s_{t+1} = Y(s_t) = \rho(s_t - c(s_t)) = \rho(s_t - s_t(1-d)) = \rho d s_t = (\rho\beta)^{1/\mu} s_t.$$

Решением этого уравнения является функция

$$s_t = s_0\,\alpha^t,$$

где $\alpha = (\rho\beta)^{1/\mu}$.

Видно, что в зависимости от величины коэффициента $\alpha$ траектория $s_t$, соответствующая стационарному потреблению, может возрастать, убывать или оставаться постоянной с течением времени.

**3.** Определить решение уравнения Беллмана для задачи с линейной полезностью:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \to \max_{0 \le c_t \le x_t};$$

$$x_{t+1} = f(x_t - c_t), \quad x_0 - \text{задано}, \quad 0 < \beta < 1.$$

если $f(\cdot) \in \mathbf{W}$ такова, что $\lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = \rho$, где $\rho\beta < 1$ (т.е. $f(\cdot)$ ограничена сверху линейной функцией $b + \rho z$, см. рис. 4.2).

При этом решение понимается как предел решений для конечных горизонтов.

Р е ш е н и е . Для конечных горизонтов имеем рекуррентное соотношение

$$V_k(x) = \max_{0 \le c \le x} \{c + \beta V_{k-1}(f(x-c))\}.$$

Обозначим $z = x - c$. Тогда

$$V_k(x) = \max_{0 \le z \le x} \{x - z + \beta V_{k-1}(f(z))\} = x + \max_{0 \le z \le x} \{-z + \beta V_{k-1}(f(z))\}.$$

1. Покажем, что $\forall k = 1, 2, \ldots$ $V_k(x) \le x + K$ для некоторой константы $K > 0$:

$$V_0 = \Phi_0(x_T) \equiv 0,$$

$$V_1(x) = x + \max_{0 \le z \le x} \{-z + \beta V_0(f(z))\} = x + \max_{0 \le c \le s} \{-z\} = x,$$

$$V_2(x) = x + \max_{0 \le z \le x} \{-z + \beta V_1(f(z))\} = x + \max_{0 \le z \le x} \{-z + \beta f(z)\} \le$$

$$\le x + \beta b + \max_{0 \le z \le x} \{-z(1 - \rho\beta)\} = x + \beta b.$$

Рассуждая по индукции, получаем:

$$V_k(x) = x + \max_{0 \le z \le x} \{-z + \beta V_{k-1}(f(z))\} \le$$

$$\le x + b(\beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{k-1}\} \le x + \frac{\beta b}{1-\beta}, \quad \forall\, k \ge 2.$$

Так как $\forall\ x \ge 0$ последовательность $V_k(x)$ – не убывает при $k \to \infty$ и, кроме того ограничена, то существует конечный предел

$$V(x) = \lim_{k\to\infty} V_k(x) \le x + K.$$

Из непрерывности оператора Беллмана $B$ для данной задачи в классе функций $\mathbf{W}$ имеем

$$B\Phi(x) = x + \max_{0 \le z \le x} \{ - z + \beta\Phi(f(z))\}$$

следует, что $BV = V$.

2. Обозначим $A(z) = - z + \beta V(f(z))$. Покажем, что функция $A(z)$ достигает максимума на множестве $\{z \ge 0\}$. Из свойств $V(\cdot)$ получаем:

$A(0) = 0$,

$A(z) = - z + \beta V(f(z)) \le - z + \beta(f(z) + K) \le - z + \beta(b + \rho z + K) = \beta(b + K) - z(1 - \rho\beta)$,

которая убывает при $z \to \infty$.

Тогда в силу вогнутости $A(\cdot)$, она имеет вид, изображенный на рис. 4.3.

3. Исходя из вида функции $A(z)$, можно заключить, что

$$V(x) = \begin{cases} x + a, & \text{при } x \ge z^*, \quad \text{т.к. } z(x) = z^* \\ \beta V(f(x)), & \text{при } x < z^* \quad \text{т.к. } z(x) = x \end{cases}, \tag{4.18}$$

где $z(x) = \arg \max\limits_{0 \le z \le x} A(z)$.

В частности, при $x < z^*$ $V(x) = \beta V(f(x)) < V(f(x))$, откуда, в силу монотонности функции $V(\cdot)$ следует, что $x < f(x)$. Но тогда по непрерывности имеем также
$z^* \le f(z^*)$ (рис. 4.4).

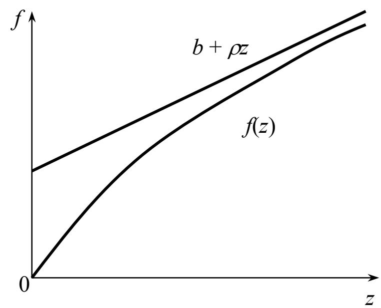

*Рис. 4.2*

4. Найдем величины $a$ и $z^*$.

В силу монотонности $f(\cdot)$ при $z \ge z^*$ выполнено $f(z) \ge f(z^*) \ge z^*$. Тогда в силу пункта 3 получаем:

$$a = \max_{z \ge 0} \{ - z + \beta V(f(z))\} =$$
$$= \max_{z \ge z^*} \{ - z + \beta(f(z) + a)\}.$$

Видно, что выражение в скобках совпадает с $A(z)$ при $z \ge z^*$. Эта функция вогнута и достигает максимума на $\{z \ge 0\}$ в точке $z^*$. Предположим также, что $A(z)$ дифференцируема в точке $z^*$ (что предполагает дифференцируемость

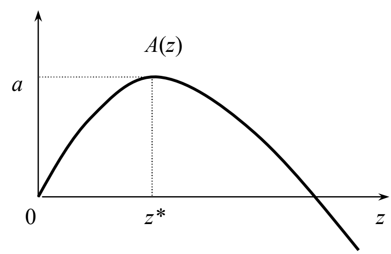

*Рис. 4.3*

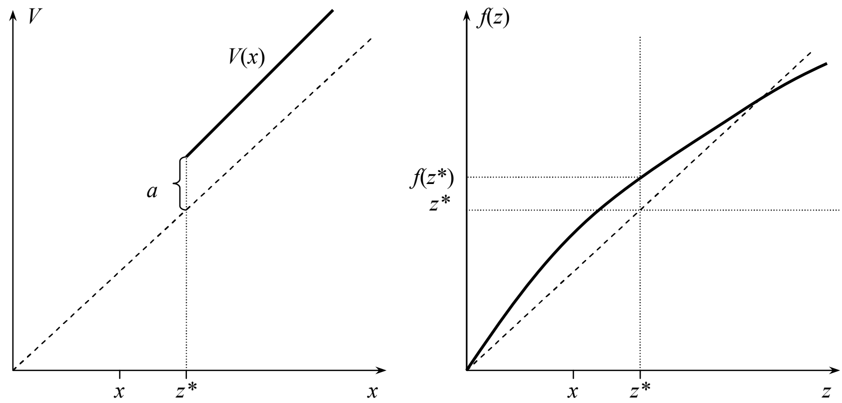


*Рис. 4.4*

функций $V(\cdot)$ и $f(\cdot)$). Тогда точка максимума может быть найдена из условия экстремума первого порядка $A'(z^*) = 0$, откуда получаем

$$f'(z^*) = \frac{1}{\beta}, \quad a = \max_{z\ge 0}\ \{-z + \beta(f(z) + a)\} = \frac{\max\limits_{z\ge 0}\{-z + \beta f(z)\}}{1-\beta}.$$

5. Построим функцию $V(\cdot)$ для $x < z^*$.

а). Рассмотрим отрезок $\Delta_1 = [x_1, z^*]$, где $x_1 < z^*$ и $f(x_1) = z^*$. Тогда $\forall\ x \in \Delta_1$ $f(x) \ge z^*$, поэтому в силу (4.18)

$$V(x) = \beta V(f(x)) = \beta(f(x) + a).$$

б). Рассмотрим отрезок $\Delta_2 = [x_2, x_1]$, где $x_2 < x_1$ и $f(x_2) = x_1$. $\forall\ x \in \Delta_2$ $f(x) \in \Delta_1$, тогда в силу (4.18) и предыдущего пункта

$$V(x) = \beta V(f(x)) = \beta^2 (f(f(x)) + a).$$

Продолжая эти рассуждения далее, на отрезке $\Delta_n = [x_n, x_{n-1}]$, где $x_n < x_{n-1}$ и $f(x_n) = x_{n-1}$. имеем:

$$V(x) = \beta^n (\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\ \text{раз}} + a).$$

На стыках функция устанавливается, исходя из непрерывности. Например, в точке $z^*$ выполнены условия:

$$V(z^{*+}) = z^* + a = z^* + \frac{\beta f(z^*) - z^*}{1-\beta} = \beta\left(f(z^*) + \frac{\beta f(z^*) - z^*}{1-\beta}\right) = V(z^{*-}).$$

Таким образом, решение уравнения Беллмана $V(x)$ полностью восстановлено для $x \ge 0$.

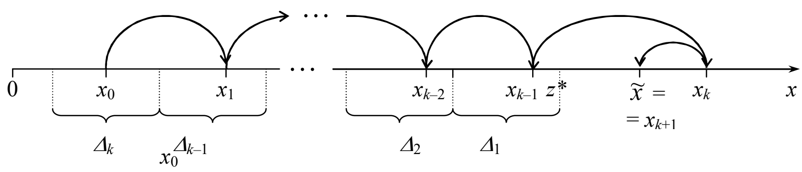


*Рис. 4.5.*

6. Определим переходное отображение $Y(x) = f(z(x))$ (где $z(x) = \arg \max\limits_{0 \le z \le x} A(z)$, см. п. 3).

При $x \ge z^*$ $z(x) = z^*$, откуда $Y(x) = f(z^*) = \tilde{x}$. При $x < z^*$ $z(x) = x$, тогда $Y(x) = f(x) > x$. Процесс изменения фазовой координаты $x$ при таком переходном отображении для некоторого начального условия $x_0$ показан на рис. 4.5.

В заключение рассмотрим задачу, в которой время (номер шага) явно входит как аргумент функции полезности, стоящей под знаком суммы (дисконтирующий множитель не считается за такой случай).

При этом результат оптимизации существенно зависит от упорядочения шагов, поэтому понятие горизонта планирования использовать нельзя. Следовательно, рекуррентное соотношение Беллмана в данной задаче будет записываться в общем виде (4.11).

**4.** З а д а ч а о р а н ц е. Имеется контейнер емкостью $V$ и грузоподъемностью $M$ и $N$ типов изделий, для каждого из которых известны стоимость $c_i$, вес $m_i$ и объем $v_i$. Требуется разместить в контейнере набор изделий максимальной суммарной стоимости.

Р е ш е н и е. Обозначим через $x_i$ – количество предметов $i$-го типа, размещенных в контейнере. Тогда задача будет иметь вид:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \le M, \qquad \sum_{i=1}^{N} v_i x_i \le V,$$

$$x_i \in \mathrm{N},\ i = 1, \ldots, N.$$

Сведем ее к дискретной задаче оптимального управления. Пусть "шагом" операции является номер класса изделий, которые складываются в контейнер. Определим две переменных состояния: $\mu_i$ – оставшаяся грузоподъемность после распределения изделий $i$-го класса и $\gamma_i$ – свободный объем после распределения изделий $i$-го класса. Тогда с каждым шагом состояние системы будет изменяться по следующему закону:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - m_{i+1}\, x_{i+1}, \quad \mu_0 = M,$$
$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - v_{i+1}\, x_{i+1}, \quad \gamma_0 = V.$$

Очевидно, управлением в данной задаче является количество изделий $x_i$, помещаемых в ранец на каждом шаге. Функция Беллмана $J_l(\mu, \gamma)$ в данной задаче будет представлять собой максимальную стоимость набора, состоящего из изделий классов $i \geq l$, помещенных в контейнер:

$$J_l(\mu, \gamma) = \max_{x_l} \{c_l x_l + J_{l+1}(\mu - m_l x_l, \gamma - v_l x_l)\}, \quad m_l x_l \leq \mu, \quad v_l x_l \leq \gamma.$$

Так как управление $x_l$ является дискретным, то функцию Беллмана удобно представлять в табличном виде, с дискретизацией, соответствующей минимальным изменениям объема и грузоподъемности контейнера при помещении в него изделий.

В качестве примера рассмотрим случай $M = 7$, $V = 7$, $N = 3$, со следующими параметрами изделий:

| **Класс**, $i$ | **Стоимость**, $c_i$ | **Масса**, $m_i$ | **Объем**, $v_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 1 |
| 2 | 5 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 3 |

В этом случае исходная задача целочисленного программирования запишется как

$$L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 7,$$
$$x_i \in \mathrm{N}, \; i = 1,\ldots, N.$$

Множество допустимых состояний системы на каждом шаге представляет собой пары $(\mu, \gamma)$, где $\mu, \gamma \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Функция Беллмана для шага 3 имеет вид:

$$J_3(\mu, \gamma) = \max_{x_3} \{ x_3\}, \quad x_3 \leq \mu, \quad 3\, x_3 \leq \gamma, \quad x_3 \in \mathrm{N}.$$

Ее значения для допустимых состояний приведены в таблице.

| $\mu \setminus \gamma$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |

На шаге 2 функция Беллмана имеет вид:

$$J_2(\mu, \gamma) = \max_{x_2} \{5x_2 + J_3(\mu - 2x_2, \gamma - 3x_2)\}, \quad 2x_2 \le \mu, \quad 3x_2 \le \gamma, \quad x_2 \in \mathrm{N}.$$

Таблица значений $J_2(\mu, \gamma)$ строится с использованием уже полученной таблицы для $J_3(\mu, \gamma)$:

| $\mu \setminus \gamma$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 |

На шаге 1 функция Беллмана имеет вид:

$$J_1(\mu, \gamma) = \max_{x_1} \{4x_1 + J_2(\mu - 3x_1, \gamma - x_1)\}, \quad 3x_1 \le \mu, \quad x_1 \le \gamma, \quad x_1 \in \mathrm{N}.$$

Таблица значений $J_1(\mu, \gamma)$ выглядит следующим образом:

| $\mu \setminus \gamma$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **3** | 0 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| **4** | 0 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 |
| **5** | 0 | 4 | 4 | 5 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| **6** | 0 | 4 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| **7** | 0 | 4 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 14 |

Максимальная стоимость набора изделий соответствует значению $J_1(7, 7)$, а сам набор – оптимальным значениям компонент управления $(x_1, x_2, x_3)$, на которых достигаются значения функций $J_1$, $J_2$ и $J_3$: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

**Упражнения**

1. Дана модель Рамсея в дискретном времени с конечным горизонтом:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1.$$

а). Выписать для данной модели рекуррентное соотношение Беллмана, найти общий вид функций выигрыша $V_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$, и оптимальных стратегий потребления $c_k(s)$.

б). Определить решение уравнения Беллмана $V(s)$ для этой задачи путем предельного перехода при $T \to \infty$ (если она есть). Показать, что стационарная стратегия потребления не зависит от $\rho$, а оптимальная стационарная фазовая траектория имеет вид геометрической прогрессии. Найти неподвижную точку стационарного переходного отображения $Y(\cdot)$ как функцию параметров $\beta$ и $\rho$.

2. В задаче:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i c_i^p \to \max_{c_i \ge 0}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \le s, \quad p > 1, \quad \beta > 0,$$

получить рекуррентное соотношение Беллмана для функций $V_n$. Исходя из него получить рекуррентное соотношение для постоянных коэффициентов в выражении для $V_n$. Описать характер оптимальной стратегии потребления $c_i$ в зависимости от параметра $\beta$.

Получить выражение для $V_n$ непосредственно.

3. Рассматривается задача:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \to \max_{0 \le c_t \le x_t};$$

$$x_{t+1} = f(x_t - c_t), \quad x_0 - \text{задано},$$

где $U(c) \le a + \delta c \ \forall\ c \ge 0$, и $f(z) \le b + \rho z \ \forall\ z \ge 0$,

$a$, $\delta$, $\beta$, $b$, $\rho$, – положительные параметры, $\beta < 1$, $\rho\beta < 1$, функции $f$, $U \in \mathbf{W}$.

Доказать, что существует решение уравнения Беллмана $V(\cdot)$ для этой задачи и имеет место неравенство:

$$V(x) \le \delta x + K, \quad K = \text{const}.$$

Определить значение $K$.

4. В задаче 3 положить:

$$U(c) = \begin{cases} 0, & c = 0 \\ a + \delta c, & c > 0 \end{cases}.$$

Построить функцию Беллмана $V(\cdot)$.

5. Дана скалярная динамическая система

$$\dot{x} = ax + bu, \qquad t \geq 0,$$

с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\infty \alpha x^2 + \beta u^2\, dt \to \inf,$$

где $a$, $b \neq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные постоянные. Показать, что оптимальное управление $u$* имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{b}(a + \sqrt{a^2 + b^2\alpha\beta^{-1}})x,$$

а функция Беллмана $V(t, x)$ – вид

$$V(t, x) = x^2\beta\, b^{-2}\,(a + \sqrt{a^2 + b^2\alpha\beta^{-1}}).$$

6. Найти функцию Беллмана $V(\cdot)$ и оптимальное управление для динамической системы

$$\dot{x} = u, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

$$x(1) \to \min; \quad |\, u \,| \leq 1.$$

7. Найти оптимальное решение задачи о ранце при $M = 8$, $V = 6$, $N = 3$:

| **Класс**, $i$ | **Стоимость**, $c_i$ | **Масса**, $m_i$ | **Объем**, $v_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 |

## Литература

1. Андреева Е.А., Бенке Х. Оптимизация управляемых систем. Тверь, Изд. ТГУ, 1996.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: "Высшая школа", 1998.
3. Беленький В.З. Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование. М.: РЭШ, 2001.
4. Брайсон А., Хо Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
5. Бурштейн И.М. Динамическое программирование в планировании. М.: Экономика, 1968.
6. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности. М.: Физматлит, 2000.
7. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966.